Risikoaversion und Risikomessung - Ein Blick ins Innere des Bernoulli-Prinzips

Jochen Wilhelm
Passau

1 Einführung

In mehreren Beiträgen hat Michael Bitz[1] in die vor allem in der deutschsprachigen Literatur stattgehabten Diskussion[2] um die Frage, ob das *Bernoulli*– oder *Erwartungsnutzen*prinzip Risikoaversion oder Höhenpräferenz widerspiegele, klärend eingegriffen. Die Diskussion war und ist deshalb von Bedeutung, weil dieses Prinzip in der Entscheidungstheorie eine ungebrochen zentrale Stellung als das dominante Paradigma zur Analyse ökonomischen Entscheidungsverhaltens bei Unsicherheit bzw. Risiko einnimmt. Im Streit steht hierbei die Auffassung von Kardinalität (der Nutzenfunktion), die von der „Höhenpräferenz-Fraktion" absolut, von der „Risikoaversions-Fraktion" als durch Bezug auf weitere empirisch bedingte Anforderungen an die Messvorschrift relativiert gesehen wird. Obwohl Verf. dieses Beitrages dazu eine dezidierte Einstellung hat,[3] soll diese Diskussion hier keine weitere Rolle spielen, vielmehr soll ein anderer Standpunkt eingenommen werden. Das Bernoulli-Prinzip ist, wissenschaftstheoretisch gesehen der Versuch einer „rationalen Rekonstruktion"[4] des vorwissenschaftlichen Konzeptes eines vernünftigen Entscheidungsverhaltens in Risikosituationen. Dabei werden einige im Prinzip beobachtbare (und eine Reihe von nicht beobachtbaren) Eigenschaften von Verhalten (nämlich elementare Wahlhandlungen) zusammen gestellt, die man vernünftiger Weise als „rational" einschätzen sollte.[5] Implizit ergibt sich daraus die „Existenz" einer Nutzenfunktion, deren Kardinalität im Kern den Streitpunkt der genannten Diskussion darstellt, da Eigenschaften dieser Funktion je nach Standpunkt als sinkender Grenznutzen einer „Höhenpräferenz" oder als „Risikoaversion" interpretiert werden. Die bei der Grundlegung des Prinzips einbezogenen Wahlhandlungen finden auf einer sehr elementaren Ebene statt; der vorliegende Beitrag versucht sich an einer Betrachtung auf einer höheren Ebene der Charakterisierung von Entscheidungsverhalten, indem er unmittelbar auf die (ausdrücklich als vorwissenschftlich aufgefassten) Konzepte der *Risikoaversion* und des *Risikos* abstellt und dabei eine Rekonstruktion im Rahmen des Bernoulli-Prinzips[6] untersucht. Dabei wird deutlich werden, dass in der Tat beide Konzepte nur simultan, d.h. aufeinander bezogen, konkretisiert werden können. Als Ausgangspunkt dienen einige typische ökonomische Entscheidungssituationen, von denen man eine gewisse vorwissenschaftliche Einschätzung hat, wie sich ein plausibles Verhalten in ihnen darstellen sollte.

Vor allem für Versicherungs–, Kapitalanlage– und Kapitalmarktprobleme, aber auch zur Performance–Messung, zur Untersuchung von Steuerwirkungen auf Investitionsentscheidungen und von Risikoanreizproblemen in der Prinzipal–Agent–Theorie wird das Erwartungsnutzenprinzip mit der zusätzlichen Unterstellung eines dem Risiko typischerweise abgeneigten Verhaltens („Risikoaversion") herangezogen. Dabei wird oft der Grad der Risikoabneigung in Zusammenhang mit einem bestimmten Entscheidungsverhalten gebracht und damit zu seiner Erklärung verwendet. So wird die Höhe der Versicherungsprämie, die jemand zur Beseitigung eines Risikos zu zahlen bereit ist, durch den Grad seiner Risikoaversion erklärt;

[1] Vgl. dazu Bitz und Rogusch (1976), Bitz (1984), Bitz (1998), Bitz (1999).

[2] Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien hier neben den Arbeiten von Michael Bitz (Bitz und Rogusch (1976), Bitz (1984), Bitz (1998)) nur die folgenden Beiträge erwähnt: Krelle (1976), Jacob (1976), Wilhelm (1977), Jacob und Leber (1978), Albrecht (1982), Albrecht (1984) Schildbach und Ewert (1983), Vetschera (1984), Wilhelm (1985), Wilhelm (1986), Schildbach (1989), Brachinger (1991), Kürsten (1992a), Kürsten (1992b), Schott (1993), Dyckhoff (1993), Kruse (1997), Schildbach (1999).

[3] Vgl. Wilhelm (1986); diese Auffassung steht der von Michael Bitz sehr nahe.

[4] Stegmüller (1983) und Stegmüller (1973)

[5] Die wohl erste axiomatische Rekonstruktion stammt bekanntlich von von Neumann und Morgenstern (1947), weshalb die „Bernoulli"-Nutzenfunktion auch häufig als „von Neumann-Morgenstern"-Nutzenfunktion bezeichnet wird, ein Sprachgebrauch, dem wir uns anschließen wollen.

[6] Wir werfen sozusagen einen Blick ins „Innere" des Bernoulli-Prinzips.

ebenso der Anteil von riskanten Investitionen am gesamten Investitionsbudget; schließlich wird die Risikoprämie, die der Markt zur Kompensation des mit einem Wertpapier verbundenen Risikos[7] verlangt, als Reflex der durchschnittlichen Risikoaversion der Marktteilnehmer verstanden. Um diese Ansätze auf eine gemeinsame theoretische Grundlage stellen zu können, sind drei miteinander verknüpfte Fragen zu beantworten:

– Welche Bedingungen sind es, die risikoaverses Entscheidungsverhalten charakterisieren?

– Ist ein befriedigendes Maß für Risikoaversion konstruierbar, das diese Eigenschaft (zumindest ordinal) misst?

– Wann sind die Konsequenzen einer Entscheidung riskanter als die einer anderen Entscheidung?

Während es auf der Hand liegt, dass die Lösungen der beiden ersten Fragen notwendige Bestandteile einer befriedigenden Theorie der angedeuteten Art darstellen, bedarf die dritte Frage einer kurzen Erläuterung: Wenn man den Versicherungsfall vor Augen hat, so ist eigentlich die Möglichkeit, sich von Risiko ganz befreien zu können, eher die Ausnahme; realistischer ist vielmehr die Fragestellung, welche Prämie man zu zahlen bereit ist, um das Risiko in bestimmter Weise zu reduzieren, d. h. von einer riskanteren zu einer weniger riskanten Situation überwechseln zu können: Um dieses Problem überhaupt präzise stellen zu können, ist ein ordinaler Begriff von Risiko erforderlich, man muss „mehr Risiko" von „weniger Risiko" scheiden können.

Die drei Fragen können nicht unabhängig voneinander adäquat beantwortet werden, da für jede von ihnen vorwissenschaftliche Vorverständnisse bestehen und bestimmte Beziehungen zwischen ihnen als intuitiv gesichert gelten, z. B.: Das Risiko im gleichen Ausmaß zu reduzieren, sollte jemandem mit höherer Risikoaversion mehr wert sein als jemandem mit geringerer Risikoaversion. Dieses Beispiel zeigt, dass es für eine Theorie mit der Ambition, die drei Fragen zu beantworten, vorwissenschaftlich bestimmte Prüfsteine gibt. Damit erhält die Fragestellung fast die Qualität einer rationalen Rekonstruktion von Begriffen, wobei sich teilweise die Rechtfertigung der Begriffsbildung aus einem theoretischen Zusammenhang zwischen diesen Begriffen herleitet, der vorwissenschaftlichen Intuitionen Genüge tut.

Im Folgenden soll der Stand der theoretischen Diskussion in wesentlichen Zügen in eine geschlossene Darstellung gebracht werden. Dabei werden zunächst in Abschnitt 2 einige formale und materielle Voraussetzungen geklärt: Neben einer Festlegung, was unter einem reinen Risiko, dem man bei Risikaversion abgeneigt gegenüber stehe, zu verstehen sei, wird das Bernoulli- bzw. Erwartungsnutzenprinzip kurz dargestellt Ergänzend werden Verteilungsfunktionen und Erwartungsstrukturen[8] als eine neben dem Konzept der Zufallsvariablen stehende Charakterisierung von riskanten Wahlobjekten eingeführt. Abschnitt 3 ist der Theorie gewidmet, wie sie von PRATT und ARROW entwickelt wurde und noch heute weite Teile der ökonomischen Literatur prägt. Diese Theorie hat zwei Mängel: Das von PRATT und ARROW unabhängig voneinander vorgeschlagene Maß für (absolute bzw. relative) Risikoaversion determiniert das Entscheidungsverhalten vollständig (d.h. neben der Risikoaversion kann die Nutzenfunktion keine weiteren Aspekte zusätzlich und unabhängig davon abbilden). Wenn man für das ARROW/PRATT–Maß am Begriff der Risikoaversion festhält, kommt man diesem Problem im Rahmen des Bernoulli-Prinzips grundsätzlich nicht aus. Dieser Aspekt soll im Folgenden zwar dokumentiert, aber nicht weiter analysiert werden. Ein zweiter Mangel des ARROW/PRATT–Konzeptes als „Maß" für Risikoaversion besteht in Folgendem: In den Fällen, in denen nicht einfach die Wahl zwischen „sicher" und „riskant", sondern zwischen „riskanter" und „weniger riskant" zu treffen ist, sind seine Voraussagen nicht immer mit intuitivem Vorverständnis zu vereinbaren. Diese Zusammenhänge werden durch die Darlegungen im Abschnitt 3 ebenfalls deutlich werden. Abschnitt 4 stellt auf den Zusammenhang zwischen Messung des Risikos und Messung der Risikoaversion in neueren Ansätzen ab. Die zu diskutierenden neueren Ansätze knüpfen an der Beobachtung an, dass auch nach Abschluss von Versicherungen die resultierende Gesamtposition gewöhnlich nicht vollständig risikofrei ist. KIHLSTROM ET AL. (1981) und ROSS (1981) haben die Versicherungsbereitschaft bei Vorliegen von Restrisiken in Form eines stochastischen Basisvermögens untersucht. PRATT UND ZECKHAUSER (1987) gehen einer ähnlichen Fragestellung nach. Diese Ansätze sollen referiert und unter dem Aspekt diskutiert werden, welcher konzeptionelle Zusammenhang zwischen „mehr Risiko" und „mehr Risikoaversion" hergestellt werden kann. Abschnitt 5 widmet sich der Frage nach der

[7] Den Einfluss von Risikoscheu auf den Kreditvergabeprozess von Banken hat BITZ (1988) untersucht.

[8] Die Erwartungsstruktur wird hier im Sinne der bestandsökonomischen Darstellung von WOLFGANG STÜTZEL verstanden. Vgl. KRÜMMEL (1966) und BITZ ET AL. (2001).

Adäquatheit und den wechselseitigen Beziehungen der vorgeschlagenen Messmethoden für größeres (oder kleineres) Risiko. Abschnitt 6 bietet eine thesenartige Zusammenfassung.

2 Grundlegende Begriffe, Annahmen und Bezeichnungen

2.1 Formulierung auf der Basis von Zufallsvariablen

Im vorwissenschaftlichen Verständnis gehört zu Risikoabneigung als Eigenschaft von Entscheidungsverhalten zweifellos, dass ein risikoaverser Entscheider von ansonsten vergleichbaren Aktionen diejenige wählt, die mit dem geringeren Risiko verbunden ist. Die Präzisierung dieser Vorstellung erfordert zweierlei: Sie erfordert zum einen zu klären, wann zwei Aktionen „ansonsten", d. h. doch wohl: vom Risiko abgesehen, vergleichbar sind. Zum anderen aber verlangt eine solche Präzisierung darzulegen, wann eine Aktion mit höherem Risiko als eine andere verbunden ist. Durch Zurücknahme des Anspruchsniveaus lässt sich die zweite Frage für Sonderfälle einfach beantworten: Eine Aktion mit sicherem Ergebnis ist weniger riskant als eine solche mit unsicherem Ergebnis.Wenn man sich zunächst mit diesem Niveau zufrieden gibt, bleibt die Frage nach der „ansonsten" gegebenen Vergleichbarkeit. Um sich ihr zu nähern und um die weiteren Ausführungen vorzubereiten, sind einige Festlegungen erforderlich.

Wir legen Entscheider zu Grunde, die ihre Entscheidung nur an den durch die gewählte Alternative erzielbaren Nettovermögenspositionen orientieren. Die Messprobleme, die mit dieser Vorstellung verbunden sind, werden hier keineswegs geleugnet, sind aber nicht charakteristisch für Entscheidungen bei Unsicherheit. Konsequent betrachtet, kann Netto-*Gesamtvermögen*sposition nicht negativ werden, eventuell gegebene Fehlbestände (offene rechtliche Schuldenpositionen) bleiben entweder offen (d. h. ohne Konsequenzen für den Entscheider) oder werden durch zukünftige Arrangements ausgeglichen; diese zukünftigen Arrangements sind daher folgerichtig mit ihren wertmäßigen Konsequenzen in die Entscheidung einzubeziehen, woraus sich die angesprochene Folgerung ergibt.[9] Der Zielerfolg der Entscheidung kann daher stets als nicht–negative reelle Zahl gemessen werden[10], das Ergebnis einer Aktion ist also eine nicht–negative reelle Zufallsvariable[11], wo erforderlich, bezeichnen wir sie mit Großbuchstaben X, Y, Z etc. Dass das Ergebnis X einer Aktion sicher ist, kann mit Hilfe des Erwartungswertes[12] $\mathrm{E}(X)$ durch Angabe der Bedingung $X = \mathrm{E}(X)$ fixiert werden. Das Ergebnis Y einer Aktion ist somit mit Risiko verbunden, wenn $Y \neq \mathrm{E}(Y)$ gilt[13].

Wenden wir uns nun der Frage zu, wann ein sicheres Ergebnis $X = \mathrm{E}(X)$ und ein unsicheres Ergebnis $Y \neq \mathrm{E}(Y)$ „ansonsten", also vom Risiko abstrahierend, vergleichbar genannt werden sollen. Dazu unterstellen wir zunächst, dass es zu jeder Zufallsvariable Y eine sichere Größe $\eta(Y)$ gibt, die, vom Risiko abgesehen, als mit Y vergleichbar eingeschätzt wird. Bezüglich η fordern wir nun[14]

Abstraktion vom Risiko [15]Die Zuordnung $\eta : Y \longmapsto \eta(Y)$ abstrahiert vom Risiko, wenn folgende

[9]Es gilt der römisch-rechtliche Grundsatz des *ultra posse nemo obligatur*.

[10]Fragen, die sich aus mehrattributiver Ergebnismessung (also auch intertemporal differenzierter Ergebnisse) ergeben, wollen wir hier ausklammern, obwohl zu diesen Fragen, insbesondere zu Fragen der Konzeption von Risikoaversion in diesem Kontext, in der wissenschaftlichen Literatur eine aktuelle Diskussion zu beobachten ist: Vgl. etwa Dorfleitner und Krapp (2007).

[11]Für alle fraglichen Zufallsvariablen legen wir einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ mit dem Stichprobenraum Ω, der σ–Algebra $\mathcal{F}$ der Informationen über den Stichprobenraum und dem Wahrscheinlichkeitsmaß P zu Grunde. Jede Zufallsvariable X hat dann eine *Verteilungsfunktion*, die wir mit $F_X(z) = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) \leq z\}$ bezeichnen; diese Funktion ist monoton steigend und von rechts stetig; die Gegenwahrscheinlichkeit $F_X^*(z) = \mathrm{P}\{\omega \in \Omega |\ X(\omega) > z\} = 1 - F_X(z)$ ist entsprechend monoton fallend und von links stetig. In vielen Fällen ist allein die Verteilungsfunktion, nicht die Zufallsvariable selbst von Bedeutung. Die Verteilungsfunktion erzeugt übrigens ihrerseits ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den reellen Zahlen.

[12]Wir nehmen hier und im Folgenden an, dass alle in Frage kommenden (Funktionen von) Zufallsvariablen unter dem betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaß intregierbar sind, d.h. vor allem einen Erwartungswert oder auch die sonst angesprochenen Momente besitzen.

[13](Un–)Gleichungen zwischen Zufallsvariablen sind im Folgenden stets als „fast sicher" zu verstehen, d. h. als mit Wahrscheinlichkeit eins erfüllt.

[14]Wir haben zwar in Fußnote 10 multiattributive Ergebnismessung ausgeklammert, sehen uns aber an dieser Stelle veranlasst, eine Bemerkung einzufügen, die sich auf diesen Fall in Zusammenhang mit einer existierenden Höhenpräferenz bezieht: Existiert eine Höhenpräferenz auf der Ergebnismenge, so kann man die zu beurteilenden Zufallsvariablen auch als die Realisationen der *Präferenzwerte* (statt eines multiattributiven Ergebnisses direkt bzw. der Netto-Vermögenspositionen) auffassen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die formal gleichen Anforderungen (i) bis (iii) inhaltlich ganz anders zu interpretieren wären.

[15]Gewissermaßen genau die umgekehrt Vorgehensweise findet sich in der neueren Diskussion um sogenannte kohärente Risikomaße, bei der bestimmte Anforderungen an ein anzulegendes Maß für (aufsichtsrechtlich relevante) Verlustrisi-

Bedingungen erfüllt sind

$$\text{Wenn } Z \geq Y \text{ ist, soll } \eta(Z) \geq \eta(Y) \text{ sein.} \tag{i}$$

$$\text{Wenn } W = \alpha Z + \beta Y \text{ ist, soll } \eta(W) = \alpha\eta(Z) + \beta\,\eta(Y) \text{ sein.} \tag{ii}$$

$$\text{Wenn } X \text{ sicher ist (d. h.} X = \mathrm{E}(X)\text{), soll } \eta(X) = X \text{ sein.} \tag{iii}$$

Einer eingehenderen Erläuterung bedarf wohl nur Anforderung (ii), denn (i) heißt lediglich, dass eine unter allen Umständen dominante Aktion auch dominant bleiben sollte, wenn man vom Risiko absieht, während (iii) vollkommen trivial erscheint. Die kritische Anforderung ist (ii). Hier wird verlangt, dass beim Zusammenfügen zweier riskanter Ergebnisse Z und Y zum Ergebnis W der vergleichbare sichere Betrag $\eta(W)$ aus den betreffenden vergleichbaren sicheren Beträgen $\eta(Z)$ und $\eta(Y)$ in entsprechender Weise zusammengefasst wird. Diese Anforderung ist nicht ohne Rückgriff auf ein gewisses Vorverständnis zu rechtfertigen: Das Zusammenfügen riskanter Positionen hat bekanntlich spezifische Risikoeffekte wie Diversifikation oder Hedging. (ii) fordert folgerichtig, dass dieser Art risikobezogene Effekte unbeachtlich bleiben müssen, wenn man vom Risiko abstrahiert. Wem dieses Argument nicht ausreicht, muss auf die generelle Aussage verwiesen werden, dass sich letztlich der gesamte Annahmenkatalog erst durch die Fruchtbarkeit der Theorie, in der er Verwendung findet, rechtfertigen kann.

Nach einem grundlegenden Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie[16] impliziert der Annahmenkatalog (i) ... (iii), dass η mit dem Erwartungswertoperators E identisch ist; d. h.: Y ist genau mit dem Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ als sicherem Ergebnis vergleichbar, wenn man vom Risiko absieht. Dem entsprechend führen wir folgende Redeweise ein:

Definition 1 *Das **reine Risiko** einer Zufallsvariablen Y wird durch $Y - \mathrm{E}(Y)$ definiert.*

Dann kann das Vorliegen (globaler) Risikoaversion jetzt wie folgt definiert werden:[17]

Definition 2 *Ein Entscheider ist **(global) risikoavers**, wenn er jeder Aktion, die zu dem Ergebnis $Y \neq \mathrm{E}(Y)$ führt, jede Aktion die zu dem Ergebnis $X = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X)$ führt, vorzieht.*

Bei Vorliegen von Risikoaversion werden reine Risiken stets als schlechter eingeschätzt als das sichere Ergebnis 0.

Entsprechend kann lokale Risikoaversion definiert werden:

Definition 3 *Ein Entscheider ist **(lokal) risikoavers** in $x_0 \in \mathbb{R}_+$, wenn es eine ϵ–Umgebung $U_\epsilon(x_0) \supset \{x \in \mathbb{R}_+ | x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon\}$ gibt, so dass er jeder Aktion mit dem Ergebnis $Y \neq \mathrm{E}(Y)$ jede Aktion mit dem Ergebnis $X = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X) \in U_\epsilon(x_0)$ vorzieht, solange alle Realisationen von Y in $U_\epsilon(x_0)$ liegen.*

Die folgende Aussage ist trivial. Ein Entscheider, der global risikoavers ist, ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}_+$ lokal risikoavers. Für eine Umkehrung des Satzes benötigt man mehr Struktur. Bisher sind an das Entscheidungsverhalten des betrachteten Entscheiders noch keine strukturellen Anforderungen gestellt worden. Für das Folgende wird nun unterstellt, die Voraussetzungen seien erfüllt, unter denen das Entscheidungsverhalten durch das **Erwartungsnutzenprinzip** repräsentiert werden kann.

Definition 4 *Ein Entscheider **entscheidet nach dem Erwartungsnutzenprinzip**, wenn es eine auf $\mathbb{R}_+$ definierte und (streng) monoton steigende reelle Funktion u gibt, so dass Y genau dann Z vorgezogen wird, wenn $\mathrm{E}(u(Y)) > \mathrm{E}(u(Z))$ gilt. Die Funktion u heißt **(von Neumann–Morgenstern–)Nutzenfunktion**. Die Nutzenfunktion u ist durch das Entscheidungsverhalten bis auf positive, affin–lineare Transformationen eindeutig bestimmt, d. h. die Verwendung der Funktion $v = c_1 u + c_0$ anstelle von u repräsentiert dasselbe Entscheidungsverhalten wie u, wobei $c_1 > 0$ und c_0 beliebig variiert werden dürfen. Wenn ein Entscheider nach dem Erwartungsnutzenprinzip entscheidet, wollen wir von einem **E–N–Entscheider** sprechen.*

---

ken gerichtet werden; zur Literatur vgl. unten Fußnote 52. Im Unterschied zu unserer Herangehensweise, die stets eine Vermögens*gesamtposition* zu Grunde legt, versuchen kohärente Risikomaße Risikomessung für Vermögens*einzelpoisitonen* vorzunehmen.

[16] Vgl. Neveu (1969), S. 57. Eine weitere Voraussetzung ist hier zu nennen, die im Text zur Vereinfachung unterdrückt wurde: (iv) Ist $Y_1, Y_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $Y_1 \geq Y_2 \geq \ldots$, die gegen null konvergiert, dann konvergiert $\eta(Y_1), \eta(Y_2), \ldots$ gegen null. Diese Voraussetzung (eine Art Stetigkeitsannahme) ist nur für den Fall eines unendlichen Stichprobenraumes erforderlich.

[17] Der multiattributive Fall kann hier sogar einbezogen werden, wenn man die einzelnen Attribute so messen kann, dass Erwartungswerte einen Sinn haben.

Auf der Grundlage dieser Definition können einige grundlegenden Sätze formuliert und bewiesen[18] werden:

Proposition 1 *Ein E–N–Entscheider ist im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}_+$ lokal risikoavers genau dann, wenn die Nutzenfunktion u in einer ϵ–Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ von x_0 konkav ist.*

Proposition 2 *Ein E–N–Entscheider ist global risikoavers genau dann, wenn die Nutzenfunktion u auf ganz $\mathbb{R}_+$ konkav ist.*

Unter gewissen Voraussetzungen kann man von der lokalen Risikoaversion auf die globale schließen:

Proposition 3 *Ist ein E–N–Entscheider überall lokal risikoavers und ist die Nutzenfunktion u auf jedem endlichen Intervall beschränkt, dann ist der E–N–Entscheider global risikoavers und seine Nutzenfunktion ist stetig.*

Bemerkung 1 *Die Voraussetzung über die Beschränktheit der Nutzenfunktion im Sinne von Proposition 3 ist schon erfüllt, wenn u auf ganz $\mathbb{R}_+$ definiert ist.*

Unter Bedingungen der Differenzierbarkeit lässt sich die Konkavität der Nutzenfunktion und damit die Risikoaversion entsprechend dem nachfolgenden Lemma charakterisieren; diese Charakterisierung ist für die Theorie der Risikoaversion besonders wichtig.[19]

Lemma 1 *Eine auf dem Intervall J definierte Funktion f, die zweimal stetig differenzierbar ist, ist konkav genau dann, wenn $f'' < 0$ auf J gilt.*

Für das Nachfolgende gehen wir stets von einem risikoaversen E–N–Entscheider mit zweimal stetig differenzierbarer Nutzenfunktion u aus, die auf ganz $\mathbb{R}_+$ definiert ist. Es gilt also:

$$u' > 0 \quad \text{und} \quad u'' < 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}_+ \; .$$

Damit ist der Ausgangspunkt für die Arrow–Pratt–Theorie der Risikoaversion erreicht; bevor wir uns aber dieser Theorie zuwenden, ist noch ein kurzer Exkurs angebracht: Die in diesem Unterabschnitt entwickelten Konzepte und getroffenen Feststellungen basieren auf dem Konzept der Zufallsvariablen. Es ist aber möglich - und das ist in der Entscheidungstheorie auch der verbreitetere Zugang - die Aussagen in der Sprache der Verteilungsfunktionen zu formulieren, mit den Verteilungsfunktionen hängen die Erwartungsstrukturen eng zusammen.

2.2 Formulierung auf der Basis von Verteilungsfunktionen und Erwartungsstrukturen

Die *Verteilungsfunktion* einer Zufallsvariablen X definiert man bekanntlich durch

$$F_X(z) = \mathrm{P}\{X \leq z\} \, ;$$

diese reelle Funktion ist monoton steigend und von rechts stetig. Die *Gegenwahrscheinlichkeit* bezeichnen wir mit $F_X^*(z) = 1 - F_X(z)$; sie ist monoton fallend und von links stetig. Die *Erwartungsstruktur* der bestandsökonomischen Darstellung[20] der Zufallsvariablen X wird wie folgt eingeführt:

$$S(X,p) = \sup\{ z \in \mathbb{R} | \; F_X^*(z) \geq p - \mathrm{P}\{X = z\}\} \, . \tag{1}$$

Im Fall einer stetigen Verteilungsfunktion ($\mathrm{P}\{X = z\} = 0$) gilt daher $S(X,p) = (F_X^*)^{-1}(p)$; die Erwartungsstruktur ist monoton fallend und von links stetig.

Mit Hilfe von Gegenwahrscheinlichkeit und Erwartungsstruktur lassen sich die Größenverhältnisse der Erwartungs-Nutzen zweier Zufallsvariablen plastisch darstellen: Es gilt

[18] Von Sonderfällen abgesehen, verzichten wir hier (auch aus Platzgründen) auf die Beweisführung.

[19] Der multiattributive Fall erfordert hier, dass die Matrix der gemischten partiellen Ableitungen nach den Attributen negativ definit ist.

[20] In „natürlicher Sprache": Die Erwartungsstruktur beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und jener wertmäßigen Höhe des Vermögens, das mit der betreffenden Wahrscheinlichkeit mindestens vorhanden sein wird.

Proposition 4

$$\mathrm{E}\left(u\left(X\right)\right) > \mathrm{E}\left(u\left(Y\right)\right) \iff \int_0^\infty u'\left(x\right)\cdot\left(F_X^*\left(x\right) - F_Y^*\left(x\right)\right)\cdot dx > 0 \tag{2}$$

und

$$\mathrm{E}\left(u\left(X\right)\right) > \mathrm{E}\left(u\left(Y\right)\right) \iff \int_0^1 u\left(S\left(X,p\right)\right)\cdot dp > \int_0^1 u\left(S\left(Y,p\right)\right)\cdot dp \tag{3}$$

Damit sind wir vorbereitet, die Problemstellung zu bearbeiten.[21]

3 Die klassische Arrow–Pratt–Theorie der Risikoaversion

3.1 Das Risikoaversionsmaß

Definition 5 (Absolute Risikoaversion) *Als Maß für die* ***(absolute) Risikoaversion*** *schlagen* Arrow[22] *und* Pratt[23] *die Größe*

$$R_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\log\left(u'\left(x\right)\right)'$$

vor.

Risikoaverse E–N–Entscheider haben eine (eindeutig bestimmte) positive (absolute) Risikoaversion. Aus Gründen, die unten deutlich werden, definieren wir bereits hier in Verallgemeinerung dieses Konzeptes wie folgt:

Definition 6 (Bilokale Risikoaversion) *Als* ***bilokale (absolute) Risikoaversion*** *der Nutzenfunktion u bezeichnen wir*[24]

$$R_u\left(x,z\right) = -\frac{u''\left(x\right)}{u'\left(z\right)}$$

Wir kürzen $R_u\left(x\right) = R_u\left(x.x\right)$ ab, wenn die beiden Argumente übereinstimmen, also die herkömmliche Risikoaversion angesprochen wird, von der vorderhand zu reden ist.

Aus der Definition lassen sich einige interessante Schlussfolgerungen für die zugehörigen Nutzenfunktionen ziehen. Zur Vorbereitung geben wir folgendes Lemma an:

Lemma 2 *Sei R eine auf ganz $\mathbb{R}_+$ definierte (stetige oder zumindest integrierbare) Funktion, so dass $\varphi_R(x,\varepsilon) = \int_\varepsilon^x R(\xi)d\xi$ für alle $x\in\mathbb{R}_+$ und ein $\varepsilon \geq 0$ definiert ist. Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$-f'' \;=\; f'\cdot R$$

für gegebenes $\varepsilon \geq 0$ genau die folgenden Lösungen:

$$f(x) = c_0 + c_1\cdot\int\limits_\varepsilon^x \exp\{-\varphi_R(\xi,\varepsilon)\}d\xi \qquad \left(c_0, c_1 \in \mathbb{R}\right).$$

Korollar (zu Lemma 2) *Die zur Risikoaversion R_u gehörende Nutzenfunktion u ist durch*

$$u(x) = c_0 + c_1\cdot\int\limits_\varepsilon^x \exp\{-\varphi_{R_u}(\xi,\varepsilon)\}d\xi$$

[21] Die folgenden Ausführungen paraphrasieren weitgehend Stoff, der heute zum Lehrbuchwissen in der Entscheiungstheorie gehört, daher wird auf einzelne Literaturverweise weitgehend und auf Beweise vielfach verzichtet; vgl. zum Lehrbuchstand Bitz (1981) und Bamberg und Coenenberg (2006).

[22] Arrow (1976); diese Quelle ist am besten zugänglich, das darin enthaltene Material ist älter: vgl. dazu Pratt (1964), wo dieses ältere Material bereits diskutiert wird.

[23] Pratt (1964).

[24] Es gilt $R_u\left(x,z\right) = R_u\left(x,x\right)\cdot\frac{u'(x)}{u'(z)} = \frac{u''(x)}{u''(z)}\cdot R_u\left(z,z\right)$.

gegeben, wobei $c_1 > 0$ gilt.

Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, da die Vorgabe der absoluten Risikoaversion – eigentlich zu verstehen als eine unter potentiell mehreren Eigenschaften des Entscheidungsverhaltens – den gesamten Verlauf der Nutzenfunktion determiniert[25]. Daraus könnte man die Überzeugung gewinnen, dass dieses Konzept der Risikoaversion als Explikat für den vorwissenschaftlichen Begriff problematisch ist, da das gesamte Entscheidungsverhalten durch den Grad der Risikoaversion determiniert wird, also kein Raum für andere Einstellungsparameter bleibt. Insbesondere wird daher auch die bilokale Risikoaversion durch die herkömmliche Risikoaversion festgelegt, es gilt nämlich unter Verwendung des Korollars[26]:

$$R_u(x,z) = R_u(x,x) \cdot \int_z^x \exp\{-\varphi_{R_u}(\xi,\varepsilon)\}d\xi \tag{4}$$

Die Darstellung des Korollars zu Lemma 2 erlaubt jetzt die Einführung einer Standardform für risikoaverse Nutzenfunktionen:

Definition 7 *Wir sagen, dass eine Nutzenfunktion in ε–**Standard–Form** vorliege, wenn sie in der Gestalt*

$$u(x) = \int_\varepsilon^x \exp\{-\varphi_{R_u}(\xi,\varepsilon)\}d\xi \tag{5}$$

gegeben ist (d. h. die Parameter im Korollar auf $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$ gesetzt sind). Diese Standardform wird auch durch die positive, affin–lineare Transformation

$$\hat{u}(x) = \frac{u(x) - u(\varepsilon)}{u'(\varepsilon)}$$

erreicht.

Vereinbarung Wir werden im Folgenden stets von **der** Standardform ohne den auf das betreffende ε bezogenen qualifizierenden Zusatz ε sprechen, wenn nicht ein ausdrücklicher Rekurs auf ε notwendig ist; in den meisten Fällen wird man $\varepsilon = 0$ wählen können. Zudem wollen wir im Folgenden annehmen, alle Nutzenfunktionen lägen in Standarform vor, d.h. es gelte stets $u(\varepsilon) = 0$ und $u'(\varepsilon) = 1$.[27]

Aus einer risikoaversen Nutzenfunktion lässt sich durch Differenzieren erneut eine (nicht notwendigerweise risikoaverse) Nutzenfunktion ableiten:

Lemma 3 *Ist u eine (zwei Mal differenzierbare) risikoaverse Nutzenfunktion (in Standardform), dann ist $u_g(x) := \frac{u'(x)-1}{u''(\varepsilon)}$ eine Nutzenfunktion in Standardform. Sie ist risikoavers, wenn u'' monoton steigt.*

Für die Ableitungen (der Standard–Form) gilt ($x \geq \varepsilon$)

$$u'(x) = \exp\{-\varphi_{R_u}(x,\varepsilon)\} \leq 1$$

und

$$R_u(x) \geq -u'' = R_u(x) \cdot \exp\{-\varphi_{R_u}(x,\varepsilon)\} \geq 0$$

Unter den Nutzenfunktionen der HARA-Klasse,[28] deren Risikoaversion durch $R_u(x) = \frac{1}{a+b\cdot x}$ gegeben ist, kann man $\varepsilon = 0$ nur wählen, solange $a \neq 0$ gilt; insbesondere ist diese Wahl für die logarithmische Nutzenfunktion $\log(x)$ also nicht möglich.

Dass $R_u(x)$ die Risikoaversion lokal misst, kann man in Anlehnung an Arrow durch Herleitung der Eigenschaft einer von diesem Maß abhängigen **Risikoprämie im Kleinen** wie folgt motivieren:

[25] So schon Pratt (1964), S. 126; Pratt zieht allerdings nicht unsere Schlussfolgerung aus diesem Umstand.

[26] Auf die Fußnote 24 wird ebenfalls hingewiesen.

[27] Der mit mathematischen Konstrukten vertraute Leser erkennt, das die Nutzenfunktionen in Standardform Repräsentanten der Klassen der folgenden Äquivalenzrelation sind: $u \sim v \Longleftrightarrow \left[u - v = const. \wedge \frac{u'}{v'} = const.\right]$

[28] Die Funktionen mit hyperbolischer absoluter Risikoaversion (HARA) werden im Kontext der (Tobin-)Separation ausführlich etwa bei Ingersoll (1987) diskutiert. Im Folgenden wollen wir ε ein für alle Mal fest wählen.

Exkurs Es wird im Kontext einer Zufallsvariablen („Lotterie”) wie im Beweis von Proposition 1 mit $x_0 = w_0 - h$ und $x_1 = w_0 + h$ bei $h > 0$ gegenüber der sicheren Ausgangssituation w_0 argumentiert: Wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit $p\,(h)$ für das Eintreten des besseren Lotterieergebnisses, um die Lotterie gegenüber der Ausgangsposition w_0 gerade als „tragbar” zu empfinden;[29] d. h. es muss gelten:

$$u(w_0) = p\,(h) \cdot u(w_0 + h) + (1 - p\,(h)) \cdot u(w_0 - h)$$

Für die dergestalt definierte Funktion $p\,(h)$ gilt:

$$\frac{dp}{dh}\,(0) = \frac{1}{4} R_u(w_0). \tag{6}$$

$\frac{dp}{dh}\,(0)$ stellt die notwendige Verbesserung der Erfolgswahrscheinlichkeit zum Zwecke des Risikoausgleichs dar; als **Risikoprämie im Kleinen** im Sinne von Arrow ergibt sich näherungsweise

$$dp\,(0) = p\,(dh) - p\,(0) = \frac{1}{4} R_u(w_0) \cdot dh.$$

Sie steigt mit dem „Risiko” dh und mit der (lokalen) Risikoaversion.

Nun ist dieses Beispiel zwar als Motivation für den Zusammenhang zwischen Risiko, Risikoaversion und Risikoübernahme durchaus geeignet, ob sich das Konzept aber im Kontext strukturreicherer Fälle von wirtschaftlichen Entscheidungsproblemen bewährt, ist damit nicht belegt; dieser Frage wollen wir uns nun zuwenden. Zwei typische Problemstellungen, die eine vorwissenschaftliche „Bewährungsprobe” für Risikoaversionskonzepte liefern können, sind ein Versicherungs– und ein Kapitalanlageproblem.

Problem 1 *Das **Versicherungsproblem** stellen wir wie folgt: Ein E–N–Entscheider hat zwischen einem Ergebnis $x_0 + Y$ (mit $\mathrm{E}(Y) \neq Y$) und einem Ergebnis $x_0 - \pi(x_0, Y)$ zu wählen, wobei $\pi(x_0, Y)$ als sicher zu zahlende Prämie für eine Versicherung gegen das „Risiko” Y interpretiert wird*[30]*. Die individuelle Grenzprämie $\pi_u(x_0, Y)$ für den E–N–Entscheider ergibt sich implizit aus der Beziehung*[31]*:*

$$\mathrm{E}(u(x_0 + Y)) = u(x_0 - \pi_u(x_0, Y))\,.$$

Welches sind die Determinanten dieser individuellen Grenzprämie?

Problem 2 *Das **Kapitalanlageproblem** kann wie folgt formuliert werden: Ein E–N–Entscheider möge seine Mittel x_0 auf eine risikofreie Anlage mit Rendite $r_f - 1$ und eine riskante Anlageform mit Rendite $r - 1$ im Verhältnis von $x_0 - \alpha$ zu x_0 verteilen. Er wird α so wählen, dass*

$$\mathrm{E}\{u((x_0 - \alpha) \cdot r_f + \alpha \cdot r)\} = \mathrm{E}\{u(x_0 \cdot r_f + \alpha \cdot (r - r_f))\}$$

maximal wird. Wir bezeichnen mit

$$\alpha_u(x_0, r) := \arg\max\{\mathrm{E}(u(x_0 \cdot r_f + \alpha \cdot (r - r_f)))\,|\,0 \leq \alpha \leq x_0\}$$

den optimalen Teil des Ausgangsbetrages, den der E–N–Entscheider riskant investiert. Eine positive Risikoprämie $\mathrm{E}(r) - r_f > 0$ führt stets zu einem definitiven Engagement in der riskanten Anlageform. Welches sind die Determinanten des optimalen riskant investierten Anlagebetrages?[32]

[29] Man bemerke schon hier, dass die Ausgangsposition als sicher angenommen wird.

[30] Allgemein werden wir das Symbol $\pi(X, Y)$ benutzen, wenn man sich gegen Zahlung der Prämie $\pi(X, Y)$ aus der Situation $X + Y$ in die Situation X (bzw. $X - \pi(X, Y)$) bringen kann.

[31] Genauer: $\pi_u(x_0, Y) = \sup\{\pi | \mathrm{E}(u(x_0 + Y)) \leq u(x_0 - \pi)\}$. Aus der Monotonie und Stetigkeit von u folgt die Bedingung im Text.

[32] Unter Bedingungen einer normalverteilten Rendite r gilt (vgl. Rubinstein (1976)) $\mathrm{cov}\,(u', r) = \alpha(x_0, r) \cdot \mathrm{E}\,(u'') \cdot \mathrm{var}\,(r)$, sodass sich die explizite Bedingung $\alpha(x_0, r) = \left(-\frac{\mathrm{E}(u'')}{\mathrm{E}(u')}\right) \frac{\mathrm{E}(r) - r_f}{\mathrm{var}(r)}$ für den riskant zu investierenden Betrag gilt; der Ausdruck $-\frac{\mathrm{E}(u'')}{\mathrm{E}(u')}$ wird uns noch beschäftigen, er ist ein Schlüssel zum Verständnis der Problematik von Risikoaversionsvergleichen.

Das vorwissenschaftliche Verständnis von Risikoaversion verlangt wohl, dass die Grenzprämie im Rahmen des Versicherungsproblems bei höherer Risikoaversion höher ist und der optimale riskante Teil des Investitionsbudgets bei höherer Risikoaversion niedriger ist.[33] Dieses Vorverständnis wird durch die folgenden Ausführungen bestätigt; allerdings sind dazu einige Vorbereitungen zu treffen, insbesondere muss präzisiert werden, wann größere bzw. kleinere Risikoaversion vorliegt, durch das Risikoaversionsmaß $R_u(x)$ wird diese Frage nur lokal beantwortet.

Definition 8 *Die Nutzenfunktion u heißt **AP–risikoaverser** (AP steht für* Arrow–Pratt*) als die Nutzenfunktion v, wenn für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt*[34]

$$R_u(x) > R_v(x)\,.$$

Der Beweis des folgenden Satzes ist recht einfach:

Proposition 5 *u ist genau dann AP–risikoaverser als v, wenn es eine monoton steigende, konkave Funktion G gibt mit $u = G \circ v$, d. h. $u(x) = G(v(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$.*

Dieser Satz hat ein nützliches Korollar, das wir asl Lemma formulieren:

Lemma 4 *Ist die Nutzenfunktion u AP–risikoaverser als v, so gilt ($x \geq \varepsilon$):*

$$u < v \leq x$$

und

$$u' < v' \leq 1$$

Lemma 4 kann auch als Konsequenz der folgenden Eigenschaft angesehen werden:

Lemma 5 *Ist die Nutzenfunktion u AP–risikoaverser als v, so ist $\frac{u'}{v'}$ (streng) monoton fallend und daher $\frac{u'(x)}{v'(x)} > \frac{u'(z)}{v'(z)}$ für alle $z > x$.*

Wir haben schon in der Fußnote 32 ankündigend von der Bedeutsamkeit des Ausdrucks $-\frac{\mathrm{E}(u'')}{\mathrm{E}(u')}$ gesprochen; das nachfolgende Resultat in Bezug auf den Vergleich zweier Nutzenfunktionen betrifft diese Größe im Zwei-Zustandsfall und verwendet das oben eingeführte Maß der bilokalen Risikoaversion:

Lemma 6 *Für zwei risikoaverse Nutzenfunktionen u und v gilt:*

$$\frac{p\,u''(x) + (1-p)\;u''(z)}{p\,u'(x) + (1-p)\;u'(z)} > \frac{p\,v''(x) + (1-p)\;v''(z)}{p\,v'(x) + (1-p)\;v'(z)} \tag{7}$$

genau dann, wenn

$$\begin{gathered} p^2\,u'(x)\;v'(x)\cdot[R_u(x) - R_v(x)] + \cdots \\ \cdots + (1-p)^2\;u'(z)\;v'(z)\cdot[R_u(z) - R_v(z)] + \cdots \\ \cdots + p\,(1-p)\,\{u'(z)\;v'(z)\cdot[R_u(x,z) - R_v(x,z)] + u'(x)\;v'(x)\cdot[R_u(z,x) - R_v(z,x)]\} \\ > 0 \end{gathered} \tag{8}$$

gilt, aber auch genau dann, wenn

$$\begin{gathered} p^2\,u'(x)\;v'(x)\cdot[R_u(x) - R_v(x)] + \cdots \\ \cdots + (1-p)^2\;u'(z)\;v'(z)\cdot[R_u(z) - R_v(z)] + \cdots \\ \cdots + p\,(1-p)\,\{u'(z)\;v'(x)\cdot[R_u(z) - R_v(x)] + u'(x)\;v'(z)\cdot[R_u(x) - R_v(z)]\} \\ > 0 \end{gathered} \tag{9}$$

gilt.

[33] Man beachte, dass Grenzprämie und optimaler Anlagebetrag in Bezug auf die Größen Y bzw. r Funktionale sind, also nicht von einzelnen Realisationen abhängen.

[34] Liegen die Realisationen aller in Betracht kommenden Zufallsvariablen in einem (offenen, halboffenen, abgeschlossenen) Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, dann kann man die Definition für die globale Risikoaversion auf dieses Intervall beschränken.

3.2 Die intuitive Bewährung des Risikoaversionmaßes

Kommen wir nun auf das Versicherungsproblem und das Kapitalanlageproblem zurück:

Proposition 6 *Sei u AP–risikoaverser als v. Dann gilt für alle Y (mit $Y \neq \mathrm{E}(Y)$):*

$$\pi_u(x_0, Y) \geq \pi_v(x_0, Y)\,.$$

Das Ergebnis entspricht der Intuition: Der risikoaverse Entscheider ist unter sonst gleichen Umständen bereit, eine höhere Prämie für die Beseitigung eines bestimmten (reinen) Risikos zu zahlen, als der weniger risikoaverse.

Entsprechendes lässt sich für das Kapitalanlageproblem formulieren. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 1$ an und konstatieren:

Proposition 7 *Die Nutzenfunktion u sei AP–risikoaverser als v. Die Lösungen der jeweiligen Kapitalanlageprobleme seien $\alpha_u(1, r)$ bzw. $\alpha_v(1, r)$. Dann gilt $\alpha_u(1, r) \leq \alpha_v(1, r)$.*

Auch dieses Ergebnis entspricht unserer Intuition: Der risikoaversere Entscheider investiert unter sonst gleichen Umständen weniger in die riskante Anlage als der weniger risikoaverse.

3.3 Fallende Risikoaversion — Relative Risikoaversion

Definition 9 *Man spricht von **steigender (fallender)** absoluter Risikoaversion, wenn $R_u(x)$ eine steigende (fallende) Funktion von x ist.*

Da in diesem Fall gilt

$$R_u(x) < R_u(x+y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ (steigende Risikoaversion)}$$

$$\text{bzw. } R_u(x) > R_u(x+y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ (fallende Risikoaversion),}$$

kann man diesen Sachverhalt auch wie folgt ausdrücken:

Proposition 8 *Die Nutzenfunktion u weist steigende Risikoaversion genau dann auf, wenn für jedes $y > 0$ die Funktion $u_y(x) = u(x + y)$ AP–risikoaverser ist als die Funktion u.*

Definition 10 *Der Ausdruck $B_u(x) = -\frac{u'''(x)}{u''(x)}$ wird als **Besonnenheit** bezeichnet.*[35]

Bemerkung 2 *Die Besonnenheit von u ist die „Risikoaversion" von u'.*

Mit Hilfe dieses Konzeptes kann man sagen:

Korollar *Die Nutzenfunktion u weist fallende Risikoaversion genau dann auf, wenn die Besonnenheit größer als die (absolute) Risikoaversion ist.*

An späterer Stelle wird der folgende Satz von Bedeutung sein:

Proposition 9 (Pratt (1964)) *: Seien u und v zweimal stetig differenzierbare risikoaverse Nutzenfunktionen mit fallender Risikoaversion. Dann weisen die konvexe Kombination $p\,u + (1-p)\;v$ $(0 \leq p \leq 1)$ und die zusammengesetzte Funktion $u \circ v$ dieselben Eigenschaften auf.*[36]

Korollar $\min\{R_u, R_v\} \leq R_{u+v} \leq \max\{R_u, R_v\}$

Die Konsequenzen aus dem folgenden Lemma zeigen, dass die für sinkende Risikoaversion notwendige Bedingung $u''' > 0$ gewissermaßen der „Regelfall" ist, wenn überhaupt Risikoaversion und nach oben beschränkter Nutzen vorliegt.

[35] Dieser Terminus (englisch „prudence") wurde von Kimball (1990) vorgeschlagen; offenbar kann man formal $B_u(x) = R_{u'}(x)$ schreiben. Kimball motiviert die Verwendung der Besonnenheit analog zu der oben vorgetragenen Risikoprämie im Kleinen. Die „Risikoprämie", die durch die Besonnenheit bestimmt wird, sorgt dafür, dass der Grenznutzen (statt wie bei Arrow der Nutzen) bei kleiner Erhöhung des Risikos nicht verändert wird.

[36] Etwas anders ausgedrückt, kann man wie folgt formulieren: Die Menge der risikoaversen Nutzenfunktionen (mit fallender Risikoaversion) bildet eine konvexe Menge. Die Risikoaversionsfunktion einer konvexen Kombination $\gamma \cdot u + (1-\gamma) \cdot v$ verläuft stets zwischen den beiden Funktionen R_u und R_v.

Lemma 7 *Sei f eine nach unten beschränkte und zweimal differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}_+$. Sei $f' < 0$ auf ganz $\mathbb{R}_+$. Dann kann f'' nicht überall negativ auf $\mathbb{R}_+$ sein.*

Daraus ergibt sich[37]

Korollar *Eine beschränkte Nutzenfunktion muss Stellen aufweisen, an denen sie lokal risikoavers ist.*

Korollar *Eine risikoaverse Nutzenfunktion kann nicht durchgängig eine negative dritte Ableitung haben (negative „Besonnenheit" aufweisen).*

Definition 11 *In Ergänzung zu der bisher ausschließlich betrachteten absoluten Risikoaversion R hat* Pratt *(1964) die so genannte **relative** Risikoaversion*

$$W(x) = -x \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)} = x \cdot R(x)$$

eingeführt.

Definition 12 *Wir sprechen von **steigender bzw. fallender relativer Risikoaversion**, wenn die Funktion $W(x)$ monoton steigt bzw. fällt.*

Es besteht der folgende Zusammenhang mit der absoluten Risikoaversion und der größeren bzw. kleineren AP-Risikoaversion.

Proposition 10 *Sei $v_y(x) = u((1+y)x)$ für $x, y \in \mathbb{R}_+$ definiert. Die relative Risikoaversion W_u der Nutzenfunktion u steigt (fällt) genau dann, wenn für alle $y \in \mathbb{R}_+$ die Funktion v_y (bzw. u) AP–risikoaverser ist als u (bzw. v_y).*

Die Charakterisierung steigender (fallender) absoluter (relativer) Risikoaversion durch das Konzept größerer (kleinerer) AP–Risikoaversion von Nutzenfunktionen im Rahmen der Propositionen 8 und 10 hat die folgenden Aussagen über die Risikoprämie $\pi_u(x_0, Y)$ und die Lösung $\alpha_u(w_0, r)$ des Kapitalanlageproblems als Konsequenzen:

Proposition 11 *Bei fallender absoluter Risikoaversion gilt:*

(i) $\pi_u(x_0, Y) > \pi_u(x_1, Y)$ *für* $x_1 > x_0$

(ii) $\alpha_u(x_0, r) < \alpha_u(x_1, r)$ *für* $x_1 > x_0$

Die relative Risikoaversion eignet sich zur Diskussion von Fragen *relativer* Grenzprämien bzw. *relativer* Anlagevolumina.

Definition 13 *Wir führen die **relative Grenzprämie** $\hat{\pi}_u(x_0, Y)$ vermöge*

$$\mathrm{E}\{u(x_0(1+Y))\} = u(x_0(1-\hat{\pi}(x_0, Y))$$

ein.

Das Verhältnis zur (absoluten) Grenzprämie ergibt sich direkt aus der Definition zu:

$$\pi_u(x_0, x_0 \cdot Y) = x_0 \hat{\pi}_u(x_0, Y) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\pi}_u(x_0, Y) = \frac{1}{x_0}\, \pi_u(x_0, x_0 \cdot Y)\,.$$

Proposition 12 *Weist die Nutzenfunktion u fallende relative Risikoaversion auf, so gilt für die relativen Grenzprämien:*

$$\hat{\pi}_u(x_0, Y) > \hat{\pi}_u(x_1, Y) \quad \textit{für } x_1 > x_0$$

[37]Lemma 7 beschränkt im Übrigen auch die möglichen Annahmen über das Vorzeichen höherer Ableitungen der Nutzenfunktion, wie sie bei der Einführung von Präferenzen gegenüber höheren Momenten der Verteilung der Ergebnisse gemacht werden. So ist bei risikoaverser Nutzenfunktion die dritte Ableitung zwangsläufig positiv, wenn sie überall dasselbe Vorzeichen aufweist. Das ist genau bei sinkender Aversion der Fall. Vgl. dazu Scott und Horvath (1980).

Bei fallender relativer Risikoaversion fällt also die relative Grenzprämie mit wachsendem Ausgangsvermögen x_0 bei gleichbleibendem *relativen* Risiko Y.

Einen entsprechenden Satz geben wir für das Kapitalanlageproblem an; dabei formulieren wir analog

$$\mathrm{E}\{u(x_0 r_f + x_0 \cdot \hat{\alpha} \cdot (r - r_f))\} \;\rightarrow\; \max!$$

mit dem Entscheidungsparameter $\hat{\alpha}$, der nun angibt, welcher (prozentuale) Anteil am Gesamtbudget x_0 riskant investiert wird: $\hat{\alpha}_u(x_0, r)$.

Proposition 13 *Weist die Nutzenfunktion u fallende relative Risikoaversion auf, so gilt*

$$\hat{\alpha}_u(x_1, r) > \hat{\alpha}_u(x_0, r) \qquad \textit{für } x_1 > x_0\,.$$

Auch hier gilt das intuitiv zu erwartende Resultat: Ein E–N–Entscheider mit sinkender relativer Risikoaversion investiert einen immer höheren (prozentualen) Anteil seines Gesamtbudgets riskant, je höher sein Gesamtbudget ist.

3.4 Würdigung

Der Erfolg der Theorie, soweit sie bis hierhin entwickelt wurde, besteht darin, dass einige Konstrukte (Risikoaversion, die Eigenschaft (AP–)risikoaverser zu sein, steigende (fallende) absolute (relative) Risikoaversion) entwickelt worden sind, durch die einige als plausibel geltende Verhaltensformen erklärt werden können: Bereitschaft zur Zahlung höherer Versicherungsprämien bei niedrigerem Ausgangsvermögen, niedrigere riskante Anlagevolumina bei niedrigerem Budget usw. Übersehen oder bewusst ausgeklammert wurde, dass unter realitätsnahen Bedingungen eine vollständige Elimination des Risikos im Versicherungsfall praktisch nie gegeben ist, dass auch im Kapitalanlagefall im Allgemeinen keine risikofreie Ausgangsposition, sondern ein nicht vermeidbares Grundrisiko (z.B. das Arbeitseinkommen) existiert. Daher stellt sich nicht so sehr die Frage „Risiko oder kein Risiko?", sondern die Frage „Mehr Risiko oder weniger Risiko?". Die letzte Frage präzise zu stellen, setzt aber einen anordnenden Begriff von Risiko voraus. Im hier anstehenden Zusammenhang sind es zwei Ansätze, die dazu einen Beitrag geliefert haben, allerdings ohne den Aspekt einer Ordnungsrelation in Bezug auf das Risiko besonders herausgearbeitet zu haben: Im Zusammenhang mit dem Versicherungsproblem ersetzen Kihlstrom et al. (1981) den festen Wert x_0 durch eine Zufallsvariable X und unterstellen Y als **unabhängig** von X, so dass sich das Versicherungsproblem (Grenzprämie) in der Gestalt

$$\mathrm{E}\{u(X+Y)\} = \mathrm{E}\{u(X - \pi_u(X,Y))\}$$

stellt, wobei X und Y unabhängig sind. Diese Situation im Auge, könnte man folgende Relation zu definieren versucht sein:

> Z ist riskanter als X, wenn $\mathrm{E}\,(Z) = \mathrm{E}\,(X)$ gilt und X und $Z - X$ unabhängig sind.

Dieses Konzept ist wenig befriedigend, da hierdurch keine transitive Relation erzeugt wird; insbesondere liegt also nicht einmal eine **Halbordnung** vor. Der zweite zu nennende Ansatz ist der von Ross (1981). Er wählt Y so, dass $\mathrm{E}(Y \mid X) = 0$ ist. Diese Annahme ist etwas schwächer und, wie sich zeigen wird, fruchtbarer als die von Kihlstrom et al. (1981). Hier wird man zu der folgenden Relation geführt:

> Z ist riskanter als X, wenn $\mathrm{E}\,(Z \mid X) = X$ gilt.

Ist $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X)$ und sind X und $X - Z$ unabhängig, dann gilt $\mathrm{E}(X - Z \mid X) = \mathrm{E}(X - Z) = 0$, d. h. $\mathrm{E}(X \mid X) - \mathrm{E}(Z \mid X) = 0$, d. h. $X = \mathrm{E}(Z \mid X)$. „Größeres Risiko" im Sinne von Kihlstrom et al. (1981) ist also stets auch „größeres Risiko" im Sinne von Ross (1981). Allerdings manifestiert auch diese Relation ohne weitere Qualifikationen keine Halbordnung, kann aber, wie man leicht sieht, mit einer zusätzlichen Einschränkung zu einer transitiven Relation gemacht werden:[38]

> Z ist riskanter als X, wenn die von Z erzeugte $\sigma-$Algebra $\mathcal{F}_Z$ feiner als die von X erzeugte $\sigma-$Algebra $\mathcal{F}_X$ ist (d.h. $\mathcal{F}_X \subset \mathcal{F}_Z$) **und** $\mathrm{E}\,(Z \mid X) = X$ gilt.

[38] Die hier zusätzlich eingeführte Bedingung ist im Kontext von dynamisch in der Zeit sich entwickelnde Größen oder von zusätzlich eingehenden Informationen, wie sie bei Marktpreisprozessen betrachtet werden, eine ganz natürliche.

Im nachfolgenden Hauptabschnitt werden die Resultate von Kihlstrom et al. (1981) und von Ross (1981), die die beiden Problemstellungen im Kontext von „mehr Risiko" behandeln, nachvollzogen. Um sie zu motivieren, werden zunächst Beispiele vorgeführt, die zu einer Revision der bisher entwickelten Konzepte in Hinsicht auf ihre Erklärungskraft Anlass geben, wenn das Ausgangs- bzw. Alternativvermögen nicht sicher ist. Im Zuge der dann folgenden Herleitung der Hauptergebnisse werden sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Vorgehensweisen zeigen.

Ein etwas außerhalb des hier ins Zentrum gestellten Untersuchungsgegenstandes liegender Ansatz, der das Konzept von Risikoaversion per se verschärft (Pratt und Zeckhauser (1987)), wird ebenfalls diskutiert, vor allem deswegen, weil eine interessante Klasse von Nutzenfunktionen in diesem Zusammenhang eine Rolle spielt, die von allgemeinem Interesse sein dürfte.

4 Neuere Ansätze in der Theorie der Risikoaversion

4.1 Zwei „Gegenbeispiele"

Um zu zeigen, dass bezüglich der Grenzprämien im Versicherungsfall befremdliche Fälle eintreten können, wenn durch Versicherung nicht das ganze Risiko beseitigt werden kann, betrachten wir den Fall wachsenden Risikos im Sinne von Ross (1981), der ja den Fall von Kihlstrom et al. (1981) als Spezialfall mitumfasst. Sei also $Z = X + Y$ (mit $\mathrm{E}(Y|\,X) = 0$) das Endvermögen, das sich ohne Versicherung einstellen wird; das Risiko Y sei gegen Zahlung einer Prämie versicherbar. Für die Grenzprämie π_u gilt dann[39]:

$$\mathrm{E}(u(X+Y)) = \mathrm{E}(u(X-\pi_u))\,.$$

Durch Taylor–Entwicklung und einige Umformungen gewinnt eine approximativ geltende Beziehung für die Grenzprämie π_u:[40]

$$\pi_u = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{E}(u''(X)}{\mathrm{E}(u'(X))}\cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{var}(Y|\,X)\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{cov}\left(\frac{u''(X)}{\mathrm{E}(u'(X))}\,,\ \mathrm{var}(Y|\,X)\right).$$

Als Spezialfälle erhält man den Arrow–Pratt–Fall durch $X = \mathrm{E}(X) = x_0$ und $\mathrm{var}(Y \mid X) = \mathrm{var}(Y)$, d. h.

$$\pi_u^{AP} = -\frac{1}{2}\,\frac{u''\,(x_0)}{u'\,(x_0)}\cdot \mathrm{var}(Y) = \frac{1}{2}\,R_u(x_0)\cdot \mathrm{var}(Y)$$

und den Fall von Kihlstrom et al. (1981) durch die Annahme, dass Y und X unabhängig sind; dann gilt nämlich $\mathrm{var}(Y|\,X) = \mathrm{var}(Y)$

$$\pi_u^K = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{E}(u''(X))}{\mathrm{E}(u'(X))}\cdot \mathrm{var}(Y)$$

Beispiel 1 (Kihlstrom et al. (1981)) *Seien die beiden Risikoaversionsfunktionen $R_u\,(x) = \frac{1}{1-x}$ und $R_v\,(x) = \frac{10\,x^9}{2-x^{10}}$ im Intervall $[0,1)$ gegeben; u ist risikoaverser als v im ganzen Intervall $[0,1)$, beide Funktionen zeigen steigende Risikoaversion an. Die Grenznutzenfunktionen (in Standardform) sind durch $u'(x) = 1 - x$ und $v'(x) = 1 - \frac{1}{2}\,x^{10}$ gegeben. Betrachten wir als Ausgangsrisiko X die Lotterie $\mathrm{P}\left(X = \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2}$ und $\mathrm{P}\left(X = \frac{99}{100}\right) = \frac{1}{2}$, dann gilt*[41]

$$-\frac{\mathrm{E}(u''(X))}{\mathrm{E}(u'(X))} = 2,\ \textit{aber}\quad -\frac{\mathrm{E}(v''(X))}{\mathrm{E}(v'(X))} = 2.951$$

Der weniger risikoaverse E-N-Entscheider mit der Nutzenfunktion v ist zur Zahlung einer höheren Prämie für die Versicherung des gleichen Risikos bereit als der risikoaversere mit der Nutzenfunktion u.[42]

[39] Im Folgenden wird die Grenzprämie $\pi_u(X,Y)$ immer nur für den Fall eines reinen Risikos, d. h. $\mathrm{E}(Y) = 0$ betrachtet. Durch $X+Y = X+\mathrm{E}(Y)+(Y-\mathrm{E}(Y))$ kann man diesen Fall immer erreichen. Dann gilt $\mathrm{E}(u(X+Y)) = \mathrm{E}(u(X+\mathrm{E}(Y)+(Y-\mathrm{E}(Y)))) = \mathrm{E}(u(X+\mathrm{E}(Y)-\pi_u(X+\mathrm{E}(Y),Y-\mathrm{E}(Y))))$. Führt man den Begriff des **Sicherheitsäquivalents** $C_u(X,Y)$ (wobei $\mathrm{E}(Y) \neq 0$ zulässig sei) ein, so ist $C_u(X,Y) \in \mathbb{R}$ durch $\mathrm{E}(u(X+Y)) = \mathrm{E}(u(X+C_u(X,Y)))$ definiert und man erhält die Beziehung $C_u(X,Y) = \mathrm{E}(Y) - \pi_u(X+\mathrm{E}(Y), X-\mathrm{E}(Y))$, die den Zusammenenhang zwischen Grenzprämie und Sicherheitsäquivalent markiert.

[40] Eine entsprechende Formel z. B. bei Ross (1981), S. 625, der den Ausdruck $E(u(X-\pi_u))$ allerdings nur bis zum linearen Glied entwickelt.

[41] Man berücksichtige: $\mathrm{E}\,(u'') = -\mathrm{E}\,(u'\cdot R_u)$.

[42] Da die Prämie nur approximativ bestimmt wurde, ist für eine exakte Aussage eine etwas differenziertere Analyse anzustellen; vgl. dazu Kihlstrom et al. (1981), S. 915.

Diese Voraussage widerspricht der Intuition. Als Konsequenz ergibt sich: Besteht Einigkeit darin, die Größe $X+Y$ für „riskanter" zu halten als die Größe X, dann ist die Ordnung nach der absoluten AP–Risikoaversion kein durchgängig intuitiv konsistentes Maß für größere Risikoaversion.

Beispiel 2 (Ross **(1981)**) *Sei*

$$A = \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \mathrm{E}(Y^2 |\, X) \neq 0 \right\}$$

das Ereignis, in dem die unter X bedingte Varianz von Y nicht verschwindet. Sei weiter $X = x_0 \cdot \mathbf{1}_A + x_1 \cdot (1 - \mathbf{1}_A)$ und $\epsilon^2 = \mathrm{E}(Y^2|X = x_0) = \mathrm{var}(Y|\, X = x_0)$; offenbar ist $\mathrm{E}(Y^2|x_1) = 0$; die Wahrscheinlichkeit von A bezeichnen wir mit $p = \mathrm{P}(A)$. Dann gilt

$$\pi_u = -\frac{1}{2}\,\frac{p \cdot u''(x_0) \cdot \epsilon^2}{\mathrm{E}(u'(X))}$$

mit $\mathrm{E}(u'(X)) = p \cdot u'(x_0) + (1-p)u'(x_1)$, so dass

$$\pi_u = \frac{1}{2}\,\frac{p \cdot \epsilon^2}{\frac{p}{R_u(x_0)} + \frac{1-p}{R_u(x_0,x_1)}}$$

gilt. Im Vergleich zur Risikoprämie einer zweiten Nutzenfunktion v gilt

$$\pi_v < \pi_u \Longleftrightarrow \frac{1}{R_u\,(x_0)}\left[p + (1-p)\,\frac{u'\,(x_0)}{u'\,(x_1)}\right] < \frac{1}{R_v\,(x_0)}\left[p + (1-p)\,\frac{v'\,(x_0)}{v'\,(x_1)}\right]$$

Bei konstanter (absoluter) Risikoaversion a_u und a_v ist die Beziehung $\pi_v < \pi_u$ offenbar dann erfüllt, wenn mit der Definition $H(a,p,\Delta) = \frac{1}{a}\left[p + (1-p)\,e^{a\cdot\Delta}\right]$ die Beziehung $H(a_u,p,x_1-x_0) < H(a_v,p,x_1-x_0)$ gilt. Das Beispiel $a_u = 1$, $a_v = 0.1$, $\Delta = 4$ (u ist also AP-risikoaverser als v) führt zu unterschiedlichen Größenverhältnissen der Risikoprämien für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p

$$\begin{aligned} 22.439 &= H\,(1, 0.6, 4) > H\,(0.1, 0.6, 4) = 11.967 \\ 6.36 &= H\,(1, 0.9, 4) < H\,(0.1, 0.9, 4) = 10.492 \end{aligned}$$

$$\frac{v'(x_1)}{-v''(x_0)} = \frac{1}{b}\,e^{-b(x_1-x_0)}$$

Das Beispiel zeigt, dass die AP-risikoaversere Nutzenfunktion u nicht immer zu einer höheren Risikoprämie führt als die weniger risikoaverse Nutzenfunktion v.

Der Grund für das „Versagen" der Arrow–Pratt–Theorie bei nur partiell möglicher Riskoreduktion ist in beiden Beispielen derselbe: Das lokale Arrow–Pratt–Maß für Risikoaversion setzt in Beziehung jeweils nur die zweite und die erste Ableitung der Nutzenfunktion **in demselben Punkt**. Demgegenüber zeigen beide Beispiele, dass bei der Bemessung der Grenzprämie die zweite und die erste Ableitung der Nutzenfunktion auch **in unterschiedlichen Punkten** ins Verhältnis gesetzt werden. Das kommt sehr deutlich in dem Faktor $-\frac{\mathrm{E}(u''(X))}{\mathrm{E}(u'(X))}$ zum Ausdruck, der die Risikoprämie in beiden Fällen im Wesentlichen bestimmt. In diesem Faktor spiegelt sich die Schwierigkeit einer Trennung von (objektivem) Risiko und (subjektiver) Risikoaversion: In ihm fließen beide ineinander.

Zwei denkbare Wege aus diesem Dilemma sind in der Literatur bislang eingeschlagen worden; auf dem einen Weg wird die Klasse der zulässigen Nutzenfunktionen eingeschränkt, die ordinale Anordnung von Risikoaversion aber beibehalten (Kihlstrom et al. (1981)), auf dem anderen werden alle risikoaversen Nutzenfunktionen zugelassen, der ordinale Vergleich der Risikoaversion hingegen verschärft (Ross (1981)). Das wird im Folgenden zu schildern sein.

4.2 Beschränkung der zulässigen Nutzenfunktionen

4.2.1 Entscheidungsverhalten bei unterschiedlicher Risikoaversion

Im Beitrag von Kihlstrom et al. (1981) wird, wie schon gesagt, der Fall untersucht, in dem X und Y unabhängig sind und Y gegen die Prämie π versichert werden kann. Es gilt (mit $\mathrm{E}(X) = 0$)

$$\mathrm{E}(u(x_0 + X + Y)) = \mathrm{E}(u(x_0 + X - \pi_u(x_0 + X, Y))\,.$$

Wegen der Unabhängigkeit von X und Y ergibt sich als Bestimmungsgleichung für die Grenzprämie:

$$\mathrm{E}(U(x_0+Y)) = U(x_0 - \pi_u(x_0+X,Y))$$

Daraus folgt, dass die in Abschnitt 3 gemachten Ausführungen übertragbar sind, wenn man Bedingungen findet, unter denen U (bzw. die analog definierte Funktion V) die dort benötigten Voraussetzungen erfüllen. Wir bezeichnen U (bzw. V) im Folgenden als „derivative Nutzenfunktion”.

Unter entsprechenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gilt offenbar

$$R_U(y) = -\frac{\mathrm{E}\{u''(X+y)\}}{\mathrm{E}\{u'(X+y)\}},$$

sodass in der Tat, wie Unterabschnitt 4.1 gezeigt hat, die Prämie (approximativ) durch die absolute Risikoaversion der „derivativen” Nutzenfunktion U so bestimmt wird, als ob das sichere Ausgangsvermögen $y = x_0$ gegeben wäre. Also kommt es darauf an, aus Eigenschaften von u (bzw. der Vergleichsfunktion v) auf die Risikoaversion von U bzw. V zu schließen.

Um zu sehen, welche Art von Bedingungen man benötigt, betrachten wir zunächst X als diskrete Zufallsvariable mit den beiden Ausprägungen x_0 und x_1 mit den Eintrittswahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$.

Dann gilt unter Verwendung von Lemma 6

$$R_U(y) \geq R_V(y) \tag{10}$$

$\Longleftrightarrow$

$$p^2\, u'(x)\; v'(x) \cdot [R_u(x) - R_v(x)] + \cdots \tag{11a}$$
$$\cdots + (1-p)^2\; u'(z)\; v'(z) \cdot [R_u(z) - R_v(z)] + \cdots \tag{11b}$$
$$\cdots + p\,(1-p)\,\{u'(z)\; v'(z) \cdot [R_u(x,z) - R_v(x,z)] + u'(x)\; v'(x) \cdot [R_u(z,x) - R_v(z,x)]\} \tag{11c}$$
$$> 0$$

Äquivalent dazu gilt auch

$$p^2\, u'(x)\; v'(x) \cdot [R_u(x) - R_v(x)] + \cdots \tag{12a}$$
$$\cdots + (1-p)^2\; u'(z)\; v'(z) \cdot [R_u(z) - R_v(z)] + \cdots \tag{12b}$$
$$\cdots + p\,(1-p)\,\{u'(z)\; v'(x) \cdot [R_u(z) - R_v(x)] + u'(x)\; v'(z) \cdot [R_u(x) - R_v(z)]\} \tag{12c}$$
$$> 0$$

Es gibt zwei unterschiedlich scharfe hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit dieser äquivalenten Varianten ein und derselben Bedingung, nämlich

$$R_u(x,z) \geq R_v(x,z) \text{ für alle } x,z \tag{13}$$

oder

$$R_u(x) \geq R_v(x) \text{ für alle } x \tag{14}$$
$$\text{und}$$
$$u'(z)\; v'(x) \cdot R_u(z) + u'(x)\; v'(z) \cdot R_u(x) \geq \tag{15}$$
$$u'(z)\; v'(x) \cdot R_v(x) + u'(x)\; v'(z) \cdot R_v(z) \text{ für alle } x,z \tag{16}$$

Zur Verifikation der Bedingung (13) erinnert man sich an $R_u(x) = R_u(x,x)$. (14) ergibt sich unmittelbar aus den Forderungen. Wir werden im folgenden Unterabschnitt sehen, dass Ross (1981) Bedingung (13) verwendet, während Kihlstrom et al. (1981) Bedingung (14) verwenden.

Im Lemma wird nun ausformuliert, dass hinreichend für (14) die „sinkende absolute Risikoaversion” von u und v ist.

Lemma 8 *Sei u AP–risikoaverser als v, seien $R_u(\xi)$ und $R_v(\xi)$ monoton nicht steigend. Dann gilt (14).*

Es ist nun ein Leichtes, die folgende zentrale Aussage zu beweisen:

Proposition 14 (Kihlstrom et al. (1981)) *Ist u AP-risikoaverser als v und weisen u und v abnehmende Risikoaversion auf, so ist die derivative Nutzenfunktion U AP–risikoaverser als die derivative Nutzenfunktion V.*

Beweis: Die ohne Schwierigkeiten vollziehbare Verallgemeinerung von Lemma 8 für beliebige diskrete Zufallsvariablen in Verbindung mit der Darstellung (12a) bis (12c) der Beziehung $R_U(y) \geq R_V(y)$ zeigt, dass die Aussage für diskrete Zufallsvariablen richtig ist. Jede Zufallsvariable kann aber punktweise als (monoton steigender) Grenzwert von diskreten Zufallsvariablen dargestellt werden[43]. Aus Stetigkeitsgründen gilt daher der Satz für alle Zufallsvariablen. Q. e. d.

Schlussfolgerung Für das Versicherungsproblem ist daher die Arrow–Pratt–Theorie anwendbar, wenn das zu versichernde Risiko von dem verbleibenden Risiko unabhängig ist und wenn die involvierten Nutzenfunktionen fallende absolute Risikoaversion aufweisen. Für das Kapitalanlageproblem gilt dasselbe, denn wenn der E–N–Entscheider über ein (unsicheres) nicht–marktfähiges Einkommen $x_0 + X$ (mit $\mathrm{E}(X) = 0$) und Mittel in Höhe von w_0 verfügt, ist $\alpha_u(x_0, w_0, X, r) = \arg\max_{\alpha} \{\mathrm{E}\{u(x_0 + X + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f))\}$, wobei hier r und X als unabhängig zu unterstellen sind. Wir setzen wieder $U(y) = \mathrm{E}\{u(y + X)\}$, so dass sich

$$\mathrm{E}\{u(x_0 + X + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f))\} = \mathrm{E}\{U(x_0 + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f))\}$$

ergibt. Daher liegt auch im Kapitalanlageproblem dieselbe Struktur vor wie unter 3.1, wobei die Nutzenfunktion u dort durch die derivative Nutzenfunktion U hier zu ersetzen ist. Damit übertragen sich die Ergebnisse entsprechend.

4.2.2 Entscheidungsverhalten in einer anderen Klasse von Situationen: Eine engere Fassung des Risikoaversionsbegriffs

Der hier in Rede stehende Beitrag von Pratt und Zeckhauser (1987) knüpft an dem Szenarium an, das bei Kihlstrom et al. (1981) im Vordergrund stand. Allerdings geht es hier nicht um das Entscheidungsverhalten bei unterschiedlichen Graden von Risikoaversion, sondern um das Verhalten in einer anderen Klasse von Entscheidungsalternativen. Dieses als „eigentliche Risikoaversion” bezeichnete Verhalten (dessen Übereinstimmung mit intuitiven Anforderungen an rationales Verhalten bei Unsicherheit man durchaus diskutieren kann) wird, wie bei Kihlstrom et al. (1981), nur von einer engeren Klasse von Nutzenfunktionen induziert. Diese Klasse ist noch enger als die der Funktionen mit sinkender absoluter Risikoaversion.

Pratt und Zeckhauser (1987) betrachten drei unabhängige Zufallsvariablen W, X, Y. Wenn nun ausgehend von W sowohl X als auch Y jeweils „unerwünschte Risiken” darstellen, sollte dann nicht $X+Y$ ebenfalls ein „unerwünschtes Risiko” sein? Formal ergibt sich unter der Voraussetzung ($W \geq 0$, $W+X \geq 0$, $W + Y \geq 0$, $W + X + Y \geq 0$) die folgende zu fordernde Implikation :

$$\mathrm{E}(u(W)) \geq \max\{\mathrm{E}(u(W + X)),\ \mathrm{E}(u(W + Y))\} \tag{17}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathrm{E}(u(W)) \geq \mathrm{E}(u(W + X + Y)) \tag{18}$$

Nun gilt aber wegen der Jensen'schen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(W + X + Y)) &= \mathrm{E}\{\mathrm{E}(u(W + X + Y)|W)\} \\ \leq \quad \mathrm{E}\{u(\mathrm{E}(W + X + Y|W))\} &= \mathrm{E}\{u(W + \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y))\}\,. \end{aligned}$$

[43]Vgl. Neveu (1969), S. 51.

Die Schlussfolgerung (18) ist sogar ohne Geltung der Prämisse (17) richtig, wenn $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = 0$ gilt, d. h. wenn X und Y „reine Risiken", im Mittel „ohne Chancen" sind. Es ist daher fraglich, ob die Anforderung (17) $\Rightarrow$ (18) überhaupt semantisch mit dem Begriff der Risikoaversion in Verbindung gebracht werden sollte.

Pratt und Zeckhauser (1987) definieren gleichwohl:[44]

Definition 14 *Die Nutzenfunktion u heißt* ***eigentlich risikoavers*** *(„proper risk–avers"), wenn (17) stets (18) impliziert.*

Für notwendige und hinreichende Bedingungen der Eigenschaft, eigentlich risikoavers zu sein, sei auf den Originalaufsatz verwiesen. Für unsere Überlegungen über einen Zusammenhang zwischen Risikobegriff und Risikoaversionsbegriff leisten sie keinen Beitrag, da, wie gezeigt, der Begriff eigentlicher Risikoaversion nicht das Verhalten gegenüber wachsendem Risiko allein betrifft.

Die Arbeit von Pratt und Zeckhauser ist weniger deshalb von Interesse, weil sie eine erwägenswerte Version des Risikoaversionsbegriffes biete, als vielmehr um des Zusammenhangs mit einer recht weiten Klasse von Nutzenfunktionen willen, die wir im folgenden Abschnitt 5 verwenden werden; wir stellen sie daher an dieser Stelle kurz dar. Die in Rede stehende Klasse ergibt sich in folgender Weise durch allgemeine konvexe Linearkombinationen von exponentiellen Nutzenfunktionen in Standardform (vgl. ähnlich: Brockett und Golden (1987)). Sei H eine (formale) Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}_+$, dann wird (Konvergenz vorausgesetzt) durch

$$u_H(x) = \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(1 - e^{-x\cdot t}\right) dH(t) \tag{19}$$

eine Funktion u_H in Standardform definiert, sie stellt den formalen Erwartungswert von exponentiellen Nutzenfunktionen dar, deren Risikoaversionen nach der Funktion H verteilt sind.

Proposition 15 *u_H gemäß (19) ist eine risikoaverse Nutzenfunktion, die sinkende (nicht steigende) absolute Risikoaversion aufweist. Ihre erste Ableitung ist die Laplace-Transformierte[45] der Verteilung H.*

Nun kann man natürlich die Laplace-Transformierte nicht für formale Verteilungen wie H bilden, sondern auch für die Verteilung F der betrachteten Zufallsvariablen: Die sich ergebende Funktion ordnet jedem Wert für die absolute Risikoaversion den Nutzenerwartungswert der betreffenden exponentiellen Nutzenfunktion zu. Der Nutzenerwartungswert der Nutzenfunktion u_H kann daher wie folgt bestimmt werden: Für die Größe X (mit der Verteilungsfunktion F) unter der Nutzenfunktion u_H ergibt sich aus (19) und dem Satz von Fubini[46]

$$\mathrm{E}\left(u_H\left(X\right)\right) = \int_0^\infty \frac{1 - \psi_F\left(t\right)}{t} \cdot dH(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \psi_X\left(t\right)}{t} \cdot dH(t).$$

Tatsache ist nun, dass die exponentielle Nutzenfunktion eigentlich risikoavers ist:

Proposition 16 *Die exponentielle Nutzenfunktion $u_a(x) = -e^{-a\,x}$ ist eigentlich risikoavers.*[47]

[44] In der Tradition von Pratt und Zeckhauser sind weitere Arbeiten zu sehen, die ebenfalls Bedingungen bezüglich der Nutzenfunktion herausarbeiten, die Implikationen der Art: 17 impliziert 18 erfüllen (vgl. Kimball (1993), Gollier und Pratt (1996), Eeckhoudt et al. (1996)).

[45] Vgl. Feller (1971): Die Laplace-Transformierte einer positiven Zufallsvariablen X ist durch $\psi_X\left(t\right) = \mathrm{E}\left(e^{-t\cdot X}\right)$ für $t \in \mathbb{R}_+$ gegeben; wir verwenden sie hier etwas allgemeiner für alle nach unten beschränkten Zufallsvariablen; ist c die größte untere Schranke von X, dann ist $e^{c\cdot t}\cdot\psi_X\left(t\right)$ eine Laplace-Transformierte im engeren Sinne. Statt $\psi_X\left(t\right)$ schreiben wir auch $\psi_F\left(t\right)$, wenn F die Verteilungsfunktion von X ist.

[46] Halmos (1950), S. 148.

[47] Zm Beweis benötigt man das folgende

Lemma Für ψ_X gibt es drei Fälle:

Lemma 9 •

•

•

Im Lichte des Lemmas in Fußnote 47 zeigt sich, dass die Voraussetzung (17) die Fälle (ii) oder (iii) dieses Lemmas impliziert, insbesondere also X und Y keine positiven Zufallsvariablen sein können.

Drei Beispiele (siehe auch PRATT UND ZECKHAUSER (1987), S. 148) für die Vielfalt der Nutzenfunktionen von Typ (19):

Beispiel 3 *Die durch*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für alle } t < a \\ 1 & \textit{sonst} \end{cases}$$

für $a \in \mathbb{R}_+$ *gegebene (entartete) Verteilungsfunktion führt auf die exponentielle Nutzenfunktion* $u_a(x) = \frac{1-e^{-a \cdot x}}{a}$.

Beispiel 4 *Das Maß der Gamma-Verteilung*[48]

$$dH(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} \cdot e^{-b \cdot t} dt \qquad \textit{für } a > 0 \tag{20}$$

führt auf die Grenznutzenfunktion (für $x \geq 0$*):*

$$u'_H(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} \cdot e^{-(x+b) \cdot t} dt \tag{21}$$

Für die Nutzenfunktion gilt daher: $u_H(x) = \frac{b}{1-a} \left[\left(1 + \frac{x}{b}\right)^{1-a} - 1 \right]$. *Die absolute Risikoaversion lautet* $\frac{a}{b+x}$*: es liegen also die risikoaversen HARA-Funktionen mit nicht konstanter Risikoaversion vor.*

Beispiel 5 *Das Maß der Gleichverteilung auf dem Intervall* $[a, b]$ *führt zu folgender Grenznutzenfunktion*

$$u'_H(x) = \frac{e^{-a\,x} - e^{-b\,x}}{(b-a) \cdot x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{b^\nu - a^\nu}{\nu! \cdot (b-a)} x^{\nu-1} \tag{22}$$

mit der Risikoaversion $\frac{1}{e^x - 1}$.

Wir teilen nun den folgenden von PRATT UND ZECKHAUSER (1987) bewiesenen Satz mit:

Proposition 17 (PRATT UND ZECKHAUSER (1987)) *Alle vollständig monotonen Nutzenfunktionen sind eigentlich risikoavers.*

Bemerkung Der Beweis beruht auf der Tatsache (FELLER (1971), S. 439), dass genau die Laplace-Transformierten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen die vollständig monotonen Funktionen sind.

Unbefriedigend ebenso an dem von KIHLSTROM ET AL. (1981) wie an dem von PRATT UND ZECKHAUSER (1987) vorgeschlagenen Ansatz ist einmal, dass die Klasse der zulässigen Nutzenfunktionen eingeschränkt wird, statt auf Bedingungen abzuheben, die nur das Verhältnis der beteiligten Nutzenfunktionen zueinander regeln. Zum anderen befriedigt die implizit unterstellte ordinale Messung von „mehr Risiko" durch Hinzufügen unabhängiger Risiken nicht: Sie ist zu eng; bei PRATT UND ZECKHAUSER (1987) kommt hinzu, dass „mehr Risiko" mit einer tendenziellen „Verbesserung" der Verteilung einhergeht. In beiden Punkten ist der nachfolgend zu entwickelte Ansatz von ROSS (1981) weiterführend.

(i) ψ_X *ist monoton fallend auf* $\mathbb{R}_+$*, dann gilt* $1 \geq \psi_X > 0$.

(ii) ψ_X *ist monoton steigend auf* $\mathbb{R}_+$*, dann gilt* $1 \leq \psi_X$.

(iii) $\exists t^* > 0 : \psi_X(t) \leq 1$ *für* $t \leq t^*$ *und* $\psi_X(t)$ *monoton steigend für* $t \geq t^*$

[48] Vgl. FELLER (1971), S. 430.

4.3 Verschärfung des Risikoaversionsbegriffs

Ross (1981) hat im Wesentlichen dieselbe Fragestellung wie Kihlstrom et al. (1981) im Auge, unterstellt aber $\mathrm{E}(Y \mid X) = 0$ anstelle der Unabhängigkeit von X und Y. Die Diskussion der „Gegenbeispiele" in Abschnitt 4.1 hat gezeigt, dass es darauf ankommt, wie die Relation von Grenznutzen und Risikoaversionskoeffizienten der beiden involvierten Nutzenfunktionen **in verschiedenen** Argumentpunkten beschaffen ist. Ross (1981) führt eine verschärfte Ordnungsrelation für Risikoaversion ein[49], die diesem Umstand Rechnung trägt:

Definition 15 *Die Nutzenfunktion u ist* ***R–risikoaverser*** *(„Ross"–risikoaverser) als v, wenn für die bilokalen Risikoaversionen*

$$R_u(x,z) \geq R_v(x,z) \qquad \text{für alle } x,z \in \mathbb{R}^+ \tag{23}$$

gilt.

Der folgende Satz ist trivial:

Proposition 18 *Ist u R–risikoaverser als v, so ist u AP–risikoaverser als v.*

Die nächste Aussage liefert ein Kriterium für die R-Risikoaversion:

Proposition 19 *Seien u und v in Standard–Form gegeben. u ist R–risikoaverser als v genau dann, wenn u AP–risikoaverser ist als v und $u''(x) \leq v''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt.*

Aus Proposition 19 folgt ein Korollar, das u und v in einer zu Proposition 5 analogen Weise verknüpft, wenn u R–risikoaverser als v ist (beide in Standard–Form!):

Korollar *Wenn u R–risikoaverser ist als v, dann gilt für $\Delta(x) = u(x) - v(x)$:*

$$\Delta(x), \Delta'(x), \Delta''(x) \leq 0\,.$$

Ein weiteres Korollar zeigt, dass die Risikoaversionsordnung nach Ross (1981) in der Tat schärfer als die nach Arrow–Pratt ist.

Korollar *Nutzenfunktionen mit konstanter absoluter Risikoaversion können nicht in der Relation „u ist R–risikoaverser als v" stehen.*

Beweis: Sei $a > b$ und $u'(x) = e^{-ax}$, v'^{-bx}; dann gilt

$$u''^{-ax} \quad \text{und} \quad v''^{-bx}$$

$$u''(x) - v''^{-ax} \left\{ -1 + \frac{b}{a}\, e^{-(b-a)x} \right\}$$

$$= \quad a\, e^{-ax} \left\{ \frac{b}{a}\, e^{(a-b)x} - 1 \right\}$$

Die Relation $u''(x) - v''(x) \leq 0$ ist nicht für alle x zu halten, da $a > b$ vorausgesetzt wurde und die Exponentialfunktion nach oben nicht beschränkt ist. Q. e. d.

Die Schlussfolgerungen für das Versicherungs– und das Kapitalanlageproblem sind nun leicht abzuleiten.

[49] Genauer verlangt Ross (1981)

$$\frac{u''(x)}{v''(x)} \geq \frac{u'(z)}{v'(z)} \quad \text{fr alle } x,z \in \mathbb{R}_+.$$

Proposition 20 (Ross **(1981))** *Ist u R–risikoaverser als v, so gilt*

$$\pi_u(x_0 + X, Y) > \pi_v(x_0 + X, Y)\,.$$

Beweis: Es ist nach dem ersten Korollar zu Proposition 18

$$u(x) = v(x) + \Delta(x)$$

mit Δ, Δ', $\Delta'' < 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(x_0 + X - \pi_u(x_0 + X, Y))) &= \mathrm{E}(u(x_0 + X + Y)) \\ &= \mathrm{E}\{v(x_0 + X + Y)\} + \mathrm{E}\{\Delta(x_0 + X + Y)\} \end{aligned}$$

Da $\Delta'' < 0$, d. h. Δ konkav ist, gilt die Jensensche Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\Delta(x_0 + X + Y)|X\} &\leq \Delta(\mathrm{E}(x_0 + X + Y|X)) \\ &= \Delta(x_0 + \mathrm{E}(X|X) + \mathrm{E}(Y|X)) = \Delta(x_0 + X) \end{aligned}$$

und daher

$$\mathrm{E}\{\Delta(x_0 + X + Y)\} = \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\{\Delta(x_0 + X + Y)|X\}\right\} \leq \mathrm{E}\{\Delta(x_0 + X)\}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(x_0 + X + Y)) &\leq \mathrm{E}\left\{v(x_0 + X + Y)\right\} + \mathrm{E}(\Delta(x_0 + X)) \\ &= \mathrm{E}\left\{v(x_0 + X - \pi_v(x_0 + X, Y)\right\} + \mathrm{E}(\Delta(x_0 + X)) \end{aligned}$$

Da Δ monoton fällt ($\Delta' < 0$), ist

$$\Delta(x_0 + X) \leq \Delta(x_0 + X - \pi_v(x_0 + X, Y)),$$

so dass

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(u(x_0 + X + Y)) &\leq \mathrm{E}\left\{v(x_0 + X - \pi_v(x_0 + X, Y))\right\} \\ &\quad + \mathrm{E}(\Delta(x_0 + X - \pi_v(x_0 + X, Y)) \\ &= \mathrm{E}\left\{u(x_0 + X - \pi_v(x_0 + X, Y)\right\} \end{aligned}$$

und daher

$$\mathrm{E}(u(x_0 + X - \pi_u(x_0 + X, Y)) \leq \mathrm{E}(u(x_0 + X - \pi_v(x_0 + X, Y))$$

gilt. Da u aber auch monoton steigt, führt die Annahme $\pi_v > \pi_u$ zum Widerspruch, so dass $\pi_u(x_0 + X, Y) \geq \pi_v(x_0 + X, Y)$ bewiesen ist. Q. e. d.

Betrachten wir noch das Kapitalanlageproblem in der Form von Unterabschnitt 4.2.2:

$$\alpha_u(x_0, w_0 X, r) = \arg\,\max_{\alpha}\,\{\mathrm{E}\{u(x_0 + X + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f))\}\}\,,$$

wobei $\mathrm{E}(r\,|\,X) = 0$ unterstellt wird. Dann gilt

Proposition 21 *Ist u R–risikoaverser als v, dann gilt*

$$\alpha_u(x_0, w_0, X, r) \leq \alpha_v(x_0, w_0, X, r)\,.$$

Beweis: Wir betrachten das Verhalten von

$$\mathrm{E}\{u(x_0 + X + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f))\}$$

im Optimum $\alpha_v(x_0, w_0, X, r)$. Es gilt

$$\mathrm{E}\{u' \cdot (r - r_f)\} = \mathrm{E}\{v' \cdot (r - r_f)\} + \mathrm{E}\{\Delta' \cdot (r - r_f)\}\,.$$

Für $\alpha = \alpha_v(x_0, w_0, X, r)$ ist $\mathrm{E}\{v' \cdot (r - r_f)\} = 0$ nach Voraussetzung. Wir betrachten

$$\mathrm{E}\{\Delta'(x_0 + X + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f)) \cdot (r - r_f)|X\}$$

Dieser Ausdruck ist für jede Realisation von X wegen $\mathrm{E}(r|X) = 0$ genau so zu behandeln, wie im Beweis von Proposition 6. Da $\Delta' < 0$ gilt und Δ' monoton fallend ist, folgt $\mathrm{E}\{\Delta' \cdot (r - r_f)\} \leq 0$ und insgesamt $\mathrm{E}\{u'(x_0 + X + w_0 \cdot r_f + \alpha(r - r_f))\} \leq 0$ für $\alpha = \alpha_v(x_0, w_0, X, r)$. Daher folgt $\alpha_u \leq \alpha_v$. Q. e. d.

Proposition 20 und Proposition 21 stellen die durch die Beispiele in 4.1 gestörte Intuition wieder her: Bei höherer R–Risikoaversion wird eine höhere Versicherungsprämie bezahlt und ein geringeres Volumen riskanter Investitionen realisiert, wenn höheres Risiko für Z gegenüber X durch die Relation $\mathrm{E}(Z\,|\,X) = X$ angezeigt wird. Auf die Formulierung und den Beweis von Sätzen, die das Verhalten der Risikoprämien und der riskanten Investitionsvolumina in Abhängigkeit von der Anfangsausstattung bei gegebener Nutzenfunktion beschrieben, kann verzichtet werden, da hier vollständig analog zu Unterabschnitt 3.3 vorzugehen ist.

Die vorstehenden Ausführungen haben deutlich gemacht, dass die Ordnungsrelation der R–Risikoaversion und die Ordnungsrelation der Risikomessung vermöge „Z riskanter als X, wenn $\mathrm{E}(Z|X) = 0$" in gewissem Sinne zueinander passen und zu intuitiv plausiblen Erklärungsansätzen für gewisse Verhaltensformen in Entscheidungssituationen bei Risiko führen. Bisher nicht diskutiert wurde die Frage, ob diese Art der ordinalen Risikomessung im Rahmen der Theorie von E–N–Entscheidern überhaupt adäquat ist. Dieser Frage soll im Folgenden nachgegangen werden.

5 Risikomessung und Risikoaversion

Die statistische Literatur ebenso wie die ökonomische Literatur[50] haben eine Fülle von Vorschlägen für die Messung von Risiko bzw. Variabilität von Zufallsgrößen hervorgebracht. Hier soll eine Beschränkung auf einige meistgenannte erfolgen.

Notation 1 *Zur Abkürzung führen wir die Symbolik*

$$Z\ R\ X$$

für den Sachverhalt ein, dass Z gemäß der Relation *R* riskanter als *X ist (X also c.p. vorzuziehen ist); durch Indizieren des Relationssymbols R deuten wir das gerade gemeinte speziellen Risikovergleichsverfahren an. Die Hauptvorschläge lassen sich wie folgt aufführen (wir gehen durchweg von der Situation* $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Z)$ *aus):*[51][52]

Fall 1 (Varianz)

$$Z\,R_V\,X \iff \mathrm{var}(Z) \geq \mathrm{var}(X) \tag{24}$$

[50] In die ökonomische Literatur sind die Grundzüge dieses Abschnitts durch den zweiteiligen Aufsatz von Rothschild und Stiglitz (1971) eingeführt worden. Wesentliche Elemente waren allerdings schon vorher in anderem Zusammenhang bekannt (vgl. dazu Mosler (1982)).

[51] Das heute in der Praxis dominante Risikokonzept des Value at Risk (VaR) folgt einer anderen Philosophie der Risikomessung; im Vordergrund steht der Wunsch nach einer Skala, auf die man riskante (Vermögens-)Positionen abbilden kann, um eine Grenze zwischen „vertretbaren" und nicht mehr „vertretbaren" Risiken ziehen zu können. Häufig steht dieser Wunsch in Zusammenhang mit aufsichtsrechtlichen Interessen der Begrenzung von Risiken; vgl. Dowd und Blake (2006). Entscheidungstheoretisch ist der VaR nicht verankert, vielmehr kann er der Klasse der Quantil-basierten Konzepte (vgl. Wirch und Hardy (1999)), deren in diesem Zusammenhang wenig beachtete Vorgänger das Konzept der oben in Abschnitt 2.2 schon eingeführten und erläuterten „bestandsökonomischen Darstellung" Wolfgang Stützels (vgl. Bitz et al. (2001)) und das des Risikohorizontes Hans-Jacob Krümmels (Krümmel (1966)) sind.

[52] Die neuere, durch das Aufkommen und die Popularität des VaR angeregte Literatur zur Risikomessung hat das Konzept der „kohärenten Risikomaße" entwickelt (Artzner et al. (1999)), auf der Basis dessen der VaR kritisch gesehen wird, das aber in der risikotheoretischen Sichtweise (Abgrenzung hinnehmbarer versus nicht mehr hinnehmbarer Risiken von Vermögens*einzelpositionen*) der Idee des VaR folgt (Acerbi (2002)); zudem verzichten diese Konzepte auf eine konsistente Einbindung in das gesamte Entscheidungsverhalten von Individuen in Risikosituationen.

Fall 2 (Stochastische Dominanz (zweiter Ordnung)) [53]

$$Z\,R_D\,X \iff \int_x^\infty F_Z^*(\xi)\cdot d\xi \le \int_x^\infty F_X^*(\xi)\cdot d\xi \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}_+ \tag{25}$$

Fall 3 (Zusätzliches ‚Rauschen')

$$Z\,R_R\,X \iff \mathrm{E}(Z\,|\,X) = X \tag{26}$$

Fall 4 (Einmütige Ablehnung durch risikoaverse E–N–Entscheider)

$$Z\,R_U\,X \iff \mathrm{E}(u(Z)) \le \mathrm{E}(u(X)) \qquad \textit{für alle (monoton steigenden)} \tag{27}$$
Nutzenfunktionen von risikoaversen E-N-Entscheidern

Einer Erläuterung bedarf wohl nur die Relation R_D in (25) ist weniger plausibel als die drei übrigen Varianten; sie ist auch eher als ein rein technisches Resultät zu verstehen, sie ist nämlich zum Fall 4 äquivalent, was man sofort aus (2) durch Spezifikation von u' herleiten kann. Wir formulieren hierzu einige Propositionen:

Proposition 22 *Unter gewissen Regularitätsbedingungen (insbesondere Beschränktheit der Zufallsgrößen) ist R_D mit R_U äquivalent.*

Proposition 23 *Notwendig für $Z\,R_U\,X$ ist, dass für die Laplace–Transformierten $\psi_Z(t)$ und $\psi_X(t)$ gilt:*

$$\psi_Z(t) \ge \psi_X(t) \qquad \textit{für alle } \ t \in \mathbb{R}_+$$

Bemerkung 3 [54]*: Natürlich impliziert $\psi_Z \ge \psi_X$ auch $\mathrm{E}(u_H(Z)) \le \mathrm{E}(u_H(X))$ für alle Nutzenfunktionen der Gestalt $u_H = \int_0^\infty \frac{1-e^{-x\cdot t}}{t}dH(t)$. Insofern ist die durch diese Bedingung erfasste Klasse von Nutzenfunktionen wesentlich größer als die der exponentiellen Nutzenfunktionen.*

Beweis: Für $t > 0$ ist $u(x) = \frac{1-e^{t\cdot x}}{t}$ eine konkave und monoton steigende Funktion in x und es gilt

$$\frac{1-\psi_Z(t)}{t} = \mathrm{E}(u(Z))\,.$$

Da $Z\,R_U\,X$ gilt, muss $\mathrm{E}(u(Z)) \le \mathrm{E}(u(X))$ für alle zulässigen Funktionen u gelten, also insbesondere (für alle $t > 0$):

$$\mathrm{E}\left(\frac{1-e^{-t\cdot Z}}{t}\right) \le -\mathrm{E}\left(\frac{1-e^{-t\cdot Z}}{t}\right)$$

d. h. $\psi_Z(t) \ge \psi_X(t)$. Q. e. d.

Dann folgt aber auch

Korollar *Notwendig dafür, dass stochastische Dominanz vorliegt, ist die entsprechende Funktionen-Dominanz der Laplace-Transformierten der Verteilungen.*

Es besteht wohl kein Zweifel, dass auf der Grundlage der Theorie der E–N–Entscheider nur die Relation R_U als adäquate Rekonstruktion der Vorstellung von „größerem Risiko" in Betracht kommt (auf R_D kann man dann, wo es bequem erscheint, als äquivalent zurückgreifen): Hat man sich einmal für ein Konzept von Risikoaversion entschieden, so sollte mehr Risiko dann vorliegen, wenn jeder risikoaverse Entscheider sich dagegen ausspricht. Dann aber stellt sich die Frage, welches Konzept von ordinaler Messung von

[53] Zur stochastischen Dominanz vgl. Whitmore und Findlay (1978). Die stochastische Dominanz erster Ordnung kann als Dominanz in einem Vektormaximumproblem mit unendlich vielen Zielen („maximiere" für jedes x die Wahrscheinlichkeit, mehr als x zur erreichen) interpretiert werden. Daher kann, in der Sprache der „Erwartungsstruktur" bzw. bestandsökonomischen Darstellung Stützels, die stochastische Dominanz erster Ordnung dadurch charakterisiert werden, dass die Erwartungsstruktur der dominanten Zufallsvariablen *stets über* der der dominierten Zufallsvariablen liegt. Die stochastische Dominanz zweiter Ordnung lässt sich bei reinen Risiken ebfalls sehr schön an der Erwartungsstruktur ablesen: Die riskantere Erwartungsstruktur liegt für kleine Wahrscheinlichkeiten stets über und ab einer bestimmten Grenzwahrschinlichkeit stets unter der weniger riskanten.

[54] Vgl. auch Mosler (1982)

Risikoaversion zu diesem Konzept von Risiko „passt".[55] Die folgenden Sätze geben darüber eine partielle Auskunft.

Vor dem Hintergrund der Ergebnisse von Unterabschnitt 4.2.2 wäre ein klarer Zusammenhang zwischen R_U und R_R wünschenswert. Dieser Zusammenhang ist in der einen Richtung leicht zu beweisen:

Proposition 24 *Falls $Z\, R_R\, X$ gilt, so gilt $Z\, R_U\, X$.*

Beweis: Der Beweis ist eine Anwendung der Jensen'schen Ungleichung für bedingte Erwartungen: Weil $\mathrm{E}(Z|X) = X$ gilt, ist mit

$$\mathrm{E}(u(Z)) = \mathrm{E}\{\mathrm{E}\{u(Z)|\, X\}\} \leq \mathrm{E}\{u(\mathrm{E}(Z|\, X))\} = \mathrm{E}(u(X))$$

der Beweis bereits geführt Q. e. d.

In der anderen Richtung ist die Sachlage deutlich komplizierter; gleichwohl gilt der folgende Satz, einen vollständigen Beweis können wir hier nicht vorlegen.

Proposition 25 [56]*: Falls $Z\, R_U\, X$ gilt, gibt es eine Zufallsvariable Y, so dass Z und $X + Y$ dieselbe Verteilung besitzen und $\mathrm{E}(Y \mid X) = 0$ gilt.*

Beweis: Der Hauptteil der Behauptung resultiert aus der Tatsache, dass Y existiert mit $\mathrm{E}(Y \mid X) \leq 0$ (siehe für entsprechende Literaturangaben Mosler (1982), S. 111 ff.). Die Eigenschaft $\mathrm{E}(Y \mid X) = 0$ folgt dann aus $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X)$ (d. h. $\mathrm{E}(Y) = 0$) und aus $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\{\mathrm{E}(Y \mid X)\}$. Q. e. d.

Bemerkung 4 *Die Anwendung von Proposition 22 sollte mit Vorsicht geschehen: Gerechtfertigt sind nur Aussagen, die allein auf der Identität der* Verteilung *von Z und $X+Y$ beruhen; die* Zufallsvariablen *Z und $X + Y$ müssen keineswegs übereinstimmen. Das wird besonders dann zu beachten sein, wenn im Problemzusammenhang, über X und Z hinaus, noch weitere unsichere Größen eine Rolle spielen (z. B. in Portfolio–Problemen).*

Man kann daher zusammenfassen. Im Wesentlichen besteht eine Äquivalenz zwischen stochastischer Dominanz zweiter Ordnung (R_D), dem Konzept zusätzlichen Rauschens (R_R), das bei Ross (1981) die zentrale Rolle spielt, und dem Konzept der einmütigen Ablehnung durch risikoaverse E–N–Entscheider. Akzeptiert man die Theorie des Erwartungsnutzens, so rechtfertigt das letztere Konzept die durch Ross vorgenommene Verschärfung der ordinalen Risikoaversionsmessung. Umgekehrt rechtfertigt dieses durch die Konformität seiner Voraussagen mit vorwissenschaftlich erwarteten Zusammenhängen das dargestellte Risikokonzept.

Abschließend sei kurz auf das (vor allem in der Finanzwirtschaft) nach wie vor populäre Konzept der Risikomessung durch die Varianz eingegangen. Aus $Z\, R_R\, X$ (und damit aus $Z\, R_D\, X$ und $Z\, R_U\, X$) folgt sofort

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Z) &= \mathrm{var}(X + Z - X) \\ &= \mathrm{var}(Z) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Z - X) \geq \mathrm{var}(X)\,.\end{aligned}$$

Also wird $Z\, R_V\, X$ von den drei übrigen (untereinander im Wesentlichen äquivalenten) Konzepten impliziert. Die Umkehrung ist aber keineswegs richtig; um das zu zeigen, beweisen wir zunächst eine einfache Bedingung für das Vorliegen der Relation R_U (und damit von R_D). Diese Bedingung, die auch für sich genommen ein interessantes und nützliches Resultat ist, wird dann für die Konstruktion eines Gegenbeispiels benutzt.

Das folgende Beispiel belegt nun, dass die Beziehung $Z\, R_V\, X$ (d. h. $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{var}(Z) > \mathrm{var}(X)$) keineswegs $Z\, R_U\, X$ nach sich zieht[57].

Beispiel 6 *Zur Konstruktion des Beispiels greifen wir auf Proposition 25 zurück: Wir greifen auf die Laplace-Transformierte der Gleichverteilung zwischen $[a, b]$ gemäß (22)zurück*

$$\psi_G(t) = \frac{e^{-a\,t} - e^{-b\,t}}{(b-a)\cdot t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}\, \frac{b^\nu - a^\nu}{\nu! \cdot (b-a)} t^{\nu-1}$$

[55] Auf den „dualen" Zusammenhang zwischen Risikoaversion und Risikogehalt weist auch Ross (2004) hin.

[56] Der Satz geht zurück auf Strassen (1965).

[57] Dem sachkundigen Leser ist diese Tatsache bekannt, da die Varianzdominanz bei Zulässigkeit aller Verteilungsformen nur mit der quadratischen Nutzenfunktion verträglich ist; vgl. Schneeweiss (1967), S. 96.

mit dem Erwartungswert $\frac{a+b}{2}$ *und der Varianz* $\frac{(b-a)^2}{12}$*; die Laplace-Transformierte der Gamma–Verteilung ist durch (21) zu*

$$\psi_\Gamma(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^\alpha}$$

mit Erwartungswert $\frac{\alpha}{\beta}$ *und Varianz* $\frac{\alpha}{\beta^2}$ *gegeben. Wir wählen nun* Z *als Gamma-verteilt und* X *als gleichverteilt derart, dass die Erwartungswerte* $\mathrm{E}(X)$ *und* $\mathrm{E}(Z)$ *sowie die Varianzen* $\mathrm{var}(X)$ *und* $\mathrm{var}(Z)$ *übereinstimmen. Wählt man etwa* $\alpha = 3$ *und* $\beta = 2$*, dann ergeben sich* $a = 0$ *und* $b = 3$*. Obwohl die Erwartungswerte und Varianzen übereinstimmen, liegt die Laplace-Transformierte der Gleichverteilung stets über der der Gamma-Verteilung, die Gamma-Verteilung wird also von allen Entscheidungsträgern mit konstanter absoluter Risikoaversion vorgezogen. Variiert man* $a \mapsto a + 0.11$ *und* $b \mapsto b - 0.11$*, so schneiden sich die beiden Kurven bei einer Risikoaversion von etwa* 40*. Vor diesem Schnittpunkt wird die Gamma-, nach diesem Schnittpunkt die Gleichverteilung vorgezogen. Das zeigt, dass trotz der Varianzverhältnisse (*$0.75 = \mathrm{var}(Z) > \mathrm{var}(X) = 0.644$*) keine Dominanz im Sinne von* R_U *vorliegen kann, da die Laplace-Transformierte von* Z *für gewisse* t *größer, für andere* t *kleiner als die Laplace–Transformierte von* X *ist; das widerspricht jedoch der Proposition 23.*

6 Zusammenfassung

Die vorstehenden Ausführungen können wie folgt thesenartig zusammengefasst werden:

a. Das konzeptionelle Problem der (ordinalen) Messung von Risiko und das der (ordinalen) Messung von Risikoaversion sind interdependent.

b. Die Implikationen der Arrow/Pratt–Theorie der Risikoaversion entsprechen der Intuition nur bei der Wahl zwischen Risiko und Nicht–Risiko.

c. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Risikoaversionsmessung und Risikomessung so zu konzipieren, dass intuitiv plausible Folgerungen über den Zusammenhang zwischen beiden möglich sind. Bisher vorgeschlagene Varianten (Kihlstrom et al. (1981) und Ross (1981) fußen auf der Arrow/Pratt–Theorie.

d. Stellt man an das Risikomessungskonzept die im Rahmen des Erwartungsnutzenkonzepts naheliegende Anforderung, dass „mehr Risiko" dadurch zu charakterisieren sei, dass alle risikoaversen Entscheider gegen dieses Mehr an Risiko Stellung beziehen, so stellt sich der Ansatz von Ross zur ordinalen Messung von Risikoaversion als der nach dem Stand der Diskussion adäquate heraus.

Literatur

Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking and Finance* 26: S. 1505–1518.

Albrecht, P. (1982). Einige Bemerkungen zur Kritik am Bernoulli-Prinzip. *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 52: S. 641–665.

Albrecht, P. (1984). Welche Risikoprferenzen bercksichtigt das Bernoulli-Prinzip? Stellungnahme zum Beitrag von Rudolf Vetschera. *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 54: S. 408–411.

Arrow, K. J. (1976). *Essays in the Theory of Risk–Bearing, 3. Nachdruck der Ausgabe von 1970*. North–Holland, Amsterdam et al.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. und Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9: S. 203–228.

Bamberg, G. und Coenenberg, A. G. (2006). *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*. Verlag Franz Vahlen, München, 13 Auflage. Vorlesungsliteratur.

Bitz, M. (1981). *Entscheidungstheorie*. Hagener Universitätstexte. Verlag Franz Vahlen, München, 1. Auflage.

Bitz, M. (1984). Zur Diskussion um die prferenztheoretischen Implikationen des Bernoulli-Prinzips. *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 54: S. 1077.

Bitz, M. (1988). Kreditvergabe und Verschuldung bei Risikoscheu – Eine risikotheoretische Analyse der Beziehungen zwischen Bank und Kreditnehmer. In: B. Rudolph und J. Wilhelm (Hrsg.), *Bankpolitik, finanzielle Unternehmensführung und die Theorie der Finanzmärkte — Festschrift z. 60. Geb. von Hans–Jacob Krümmel*, S. 68–105. Duncker & Humblot.

Bitz, M. (1998). Bernoulli-Prinzip und Risikoeinstellung. *Zeitschrift fr betriebswirtschaftliche Forschung* 10: S. 916–932.

Bitz, M. (1999). Erwiderung zur Stellungnahme von Thomas Schildbach zu dem Aufsatz „Bernoulli–Prinzip und Risikoeinstellung“ in der ZfbF 10/1998, S. 916–932. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 51: S. 484–487.

Bitz, M., Niehoff, K. und Terstege, U. (2001). Wolfgang Sttzels „bestandskonomische Darstellung“und die neuere Finanizierungstheorie. In: H. Schmidt, E. Ketzel und S. Prigge (Hrsg.), *Wolfgang Sttzel - Moderne Konzepte fr Finanzmrkte, Beschftigung und Wirtschaftsverfassung*, S. 207–243. Mohr Siebeck, Tbingen.

Bitz, M. und Rogusch, M. (1976). Risiko-Nutzen, Geldnutzen und Risikoeinstellung: Zur Diskussion um das Bernoulli-Prinzip. *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 12: S. 853–868.

Brachinger, H. W. (1991). Das Erwartungsnutzenmodell: Sein Anomaliebegriff und die „Vernünftigkeit“ seiner Prämissen. *Jahrbuch für Nationalökonomie und Statistik* 208: S. 81–93.

Brockett, P. und Golden, L. L. (1987). A Class of Utility Functions Containing All the Common Utility Functions. *Management Science* 33: S. 955–964.

Dorfleitner, G. und Krapp, M. (2007). On multiattributive risk aversion: Some clarifying results. *Review of Managerial Science* 1: S. 47–63.

Dowd, K. und Blake, D. (2006). After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance Applications of Quantile-Based Risk Measures. *The Journal of Risk and Insurance* 73(2): S. 193–229.

Dyckhoff, H. (1993). Ordinale versus kardinale Messung beim Bernoulli–Prinzip — Eine Analogiebetrachtung von Risiko– und Zeitpräferenz. *OR Spektrum* 15: S. 139–146.

Eeckhoudt, L., Gollier, C. und Schlesinger, H. (1996). Changes in background risk and risk taking behavior. *Econometrica* 64(3): S. 683–689.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Band II*. John Wiley & Sons, New York et al., 2. Auflage.

Gollier, C. und Pratt, J. W. (1996). Risk vulnerability and the tempered effect of background risk. *Econometrica* 64(5): S. 1109–1124.

Halmos, P. R. (1950). *Measure Theory*. Van Nostrand, New York.

Ingersoll, Jr., J. E. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield, Totowa/New Jersey.

Jacob, H. (1976). Bernoulli-Prinzip und rationale Entscheidung bei Unsicherheit (unter Mitarbeit von Wilhelm Leber). *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 46: S. 177–204.

Jacob, H. und Leber, W. (1978). Bernoulli-Prinzip und rationale Entscheidung bei Unsicherheit. Ergnzung und Weiterfhrung. *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 48: S. 978–993.

Kihlstrom, R. E., Romer, D. und Williams, S. (1981). Risk Aversion with Random Initial Wealth. *Econometrica* 49(6): S. 911–920.

Kimball, M. S. (1990). Precautionary Saving in the Small and in the Large. *Econometrica* 58(1): S. 53–73.

Kimball, M. S. (1993). Standard Risk Aversion. *Econometrica* 61(3): S. 589–611.

Krelle, W. (1976). Einige Bemerkungen zu Jacobs und Lebers „Rationaler Entscheidung bei Unsicherheit“. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 46: S. 522–523.

Krümmel, H.-J. (1966). Finanzierungsrisiken und Kreditspielraum. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 36: S. 134–157.

Kruse, K.-O. (1997). Kardinalitt und die Aufspaltung von Hhen- und Risikoprferenz beim Bernoulli-Prinzip. *OR Spektrum* 19: S. 31–34.

Kürsten, W. (**1992**a). Messtheorie, Axiomatik und Bernoulli–Prinzip — Erwiderung zur Stellungnahme von Prof. Dr. Thomas Schildbach. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 62: S. 485–488.

Kürsten, W. (**1992**b). Präferenzmessung, Kardinalität und sinnmachende Aussagen — Enttäuschung über die Kardinalität des Bernoulli–Nutzens. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 62: S. 459–477.

Mosler, K. C. (**1982**). *Entscheidungsregeln bei Risiko: Multivariate stochastische Dominanz*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer Verlag, Berlin et al.

von Neumann, J. und Morgenstern, O. (**1947**). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, 2. Auflage.

Neveu, J. (**1969**). *Mathematische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie*. R. Oldenbourg Verlag, München–Wien.

Pratt, J. W. (**1964**). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica* 32(1/2): S. 122–136.

Pratt, J. W. und Zeckhauser, R. J. (**1987**). Proper Risk Aversion. *Econometrica* 55(1): S. 143–154.

Ross, S. A. (**1981**). Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and in the Large with Applications. *Econometrica* 49(3): S. 621–638.

Ross, S. A. (**2004**). Compensation, incentives, and the duality of risk aversion and riskiness. *Journal of Finance* 59(1): S. 207–225.

Rothschild, M. und Stiglitz, J. E. (**1971**). Increasing Risk II: Its Economic Consequences. *Journal of Economic Theory* 3: S. 66–84.

Rubinstein, M. E. (**1976**). The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. *Bell journal of Economics* 7: S. 407–425.

Schildbach, T. (**1989**). Zur Diskussion über das Bernoulli–Prinzip in Deutschland und im Ausland. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 59: S. 766–778.

Schildbach, T. (**1999**). Stellungnahme zu dem Beitrag von Michael Bitz „Bernoulli– Prinzip und Risikoeinstellung“ in der ZfbF 10/1998, S. 916–932. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 51: S. 480–483.

Schildbach, T. und Ewert, R. (**1983**). Einige Bemerkungen zur Kritik der Kritik am Bernoulli–Prinzip, Stellungnahme zum Beitrag von Peter Albrecht. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 53: S. 538–589.

Schneeweiß, H. (**1967**). *Entscheidungskriterien bei Risiko*. Springer Verlag, Berlin et al.

Schott, W. (**1993**). Die Eignung des Bernoulli–Prinzips für betriebswirtschaftliche Entscheidungen — Eine Stellungnahme zu den Beiträgen von W. Kürsten und T. Schildbach in ZfB 4/1992, S. 459–488. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 63: S. 197–200.

Scott, R. C. und Horvath, P. A. (**1980**). On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance. *Journal of Finance* 35(4): S. 915–919.

Stegmüller, W. (**1973**). *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band IV: Personelle und Statistische Wahrscheinlichkeit, 2. Halbb.: Statistisches Schlie šen - Statistische Begründung - Statistische Analyse*. Springer Verlag, Berlin et al.

Stegmüller, W. (**1983**). *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band I: Erklärung, Begründung, Kausalität, 2. Aufl.*. Springer Verlag, Berlin et al.

Strassen, V. (**1965**). The Existence of Proability Measures with Given Marginals. *Annals of Mathematical Statistics* 36: S. 423–439.

Vetschera, R. (**1984**). Welche „Risikoprferenzen“ bercksichtigt das Bernoulli-Prinzip? *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 54: S. 401–407.

Whitmore, G. A. und Findlay, M. C. (Hrsg.) (**1978**). *Stochastic Dominance — An Approach to Decision–Making Under Risk*. D. C. Heath and Company, Lexington/Mass. et al.

Wilhelm, J. (**1977**). Zur Diskussion über das Bernoulli Prinzip — Anmerkungen zu einem Aufsatz von Bitz und Rogusch. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 47: S. 203–205.

Wilhelm, J. (1985). Bernoulli–Prinzip — und kein Ende? *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 55: S. 635–639.

Wilhelm, J. (1986). Zum Verhältnis von Höhenpräferenz und Risikopräferenz — Eine theoretische Analyse. *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 38: S. 467–491.

Wirch, J. L. und Hardy, M. R. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance: Mathematics and Economics* 25: S. 337–347.