Portfolio–Selektion: Die (analytische) Geometrie des effizienten Randes

Jochen Wilhelm* Johannes Garhammer†

Zusammenfassung

Der herkömmliche Effizienzbegriff der Theorie der Portfolio Selektion wird erweitert und im Kontext von nicht-linearen Optimierungsaufgaben ausgewertet. Neben Wertpapieranlagen wird auch die Möglichkeit berücksichtigt, Mittel in der Kasse zu halten. Statt eine risikofreie Anlageform vorzusehen, werden vor dem Hintergrund des Konzeptes der stochastischen linearen Unabhängigkeit risikofreie Hedge–Portfolios und Arbitrage–Portfolios berücksichtigt. Die bekannten Separationsresultate werden in diesem Kontext verallgemeinernd neu hergeleitet. Auf der Basis der Separationsergebnisse werden die analytische Geometrie des effizienten Randes und die Struktur von effizienten Gesamtpositionen ausgeleuchtet. Eine duale Beziehung zwischen einer als erwartungswertproportionalen Bewertung des Marktes und der Existenz riskanter effizienter Gesamtpositonen ergibt sich als Nebenresultat. Die Rendite von Hedge–Portfolios erweist sich als nicht–negativ, „das" Law of One Price ist ebenfalls eine Schlussfolgerung aus der Effizienz, das varianzminimale Portfolio ist ineffizient.

1 Einführung und Problemstellung

Lehrbücher der Finanzierungstheorie behandeln als eines der Kernstücke des Faches die Konstruktion von (μ, σ)–effizienten Wertpapierportfolios, als Basiselement sowohl der Portfolio-Selection-Theorie als auch des Capital Asset Pricing Modells (CAPM).[1] (μ, σ)–effizient sind bekanntlich Portfolios, die bei einem Erwartungswert von μ eine geringstmögliche Varianz σ^2 und bei einer Varianz von σ^2 einen höchstmöglichen Erwartungswert μ aufweisen, wobei dann noch zu präzisieren bleibt, welche unsichere Größe die Grundlage für die Bildung von Erwartungswert und Varianz bildet. Für eine gängige Vorgehensweise mögen hier stellvertretend etwa

*Universität Passau – Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre mit Schwerpunkt Finanzierung

†Universität Passau – Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre mit Schwerpunkt Finanzierung

[1] BERND RUDOLPH, dem dieser Beitrag – er ist in leicht gekürzter Form in der Festschrift zum 65. Geburtstag des Jubilars (SCHÄFER ET AL. (2009), WILHELM UND GARHAMMER (2009)) veröffentlicht worden – zugeeignet ist, gehört zu der Generation der ersten Forscher und Hochschullehrer, die im deutschsprachigen Raum die Sichtweise aufgegriffen und weiter entwickelt haben, die die Phänomene der finanziellen Sphäre des Unternehmens (GUTENBERG) konsequent vor dem Hintergrund der Finanzmärkte betrachtet und daher betriebswirtschaftliche Fragestellungen mit Erkenntnissen und Methoden der Kapitalmarkttheorie zu bearbeiten anleitet (schon in seiner Habilitationsschrift hat sich Rudolph mit Fragen der optimalen Kapitalstruktur bei segmentierten Kapitalmärkten befasst). Das ist heute selbstverständlicher Standard in der wissenschaftlichen ebenso wie in der Lehrbuchliteratur, so auch in RUDOLPH (2006).

COPELAND ET AL. (2007), INGERSOLL (1987) und auch TRAUTMANN (2007). Der dort gewählte Zugang ist zweistufig:

Auf der ersten Stufe werden Portfolios betrachtet, die nur aus riskanten Wertpapieren bestehen (Markowitz–Theorie: MARKOWITZ (1952), MARKOWITZ (1959)), während erst auf einer zweiten Stufe eine sichere Anlageform hinzutritt (mit dem Resultat der sogenannten TOBIN-Separation: TOBIN (1957)). Auf der ersten Stufe wird nicht nur ausgeschlossen, dass für die Mittelanlage auch risikofreie Alternativen zur Verfügung stehen könnten, sondern durch eine scheinbar technisch als erforderlich erscheinende Annahme – Existenz der Inversen der Kovarianzmatrix – auch verhindert, dass risikofreie Positionen auf dem Wege des Hedging gebildet werden können: es existieren keine „Hedge–Portfolios". Wertpapiere werden durch ihre Rendite charakterisiert, als Basis des Portfolio–Erfolges wird entsprechend die Portfolio–Rendite verwendet, die Ermittlung der effizienten Portfolios stützt sich bei der Optimierung auf die Multiplikatorenmethode nach LAGRANGE; auf diesem Wege ergeben sich notwendige Bedingungen für effiziente Portfolios.

Der in dieser Arbeit darzustellende Ansatz unterscheidet sich in mehrerlei Hinsicht von dem skizzierten Lehrbuchstandard. Auf die spezifische Rolle einer explizit gegebenen risikofreien Anlageform wird ebenso verzichtet, wie auf die Voraussetzung einer invertierbaren Kovarianzmatrix (insoweit wird tendenziell dem Ansatz von ROLL (1977) gefolgt). Zudem aber wird hier nicht auf die Renditen, sondern explizit auf Wertpapier–Payoffs und Preise (Zahlungsstromdarstellung) abgestellt (so auch schon RUDOLPH (1979)). Zusätzlich wird kein Budget vorgegeben, vielmehr wird auch der investierte Betrag der Effizienzanforderung unterworfen. Schließlich wird berücksichtigt, dass Investoren auch Mittel in der Kasse halten können.

Diese Konstruktionsmerkmale führen auf einen neuartigen Effizienzbegriff (es wird von (μ, σ, w_0)–Effizienz gesprochen werden) und machen eine Erweiterung des mathematischen Rüstzeugs zur Problemformulierung und –lösung erforderlich (das Konzept von „stochastisch linear (un–)abhängigen" Payoffs findet Verwendung und die gewöhnliche Methode der LAGRANGE-Mulitplikatoren wird durch die KUHN–TUCKER–Theorie der nichtlinearen Optimierung ersetzt). In diesem Rahmen wird der Frage nachgegangen, wie effiziente Gesamtpositionen und wie die sie konstituierenden Portfolios beschrieben werden können. Wie sich zeigen wird, können sie durch ein „Maximumprinzip der Effizienz" charakterisiert und mit Hilfe der KUHN–TUCKER–Bedingungen konkretisiert werden.

Stochastische lineare Unabhängigkeit ist das mathematische gegenstück zur Abwesenheit von (echten) Hedge–Portfolios. Der aus der linearen Algebra bekannte Begriff einer „Basis" wird auf den hier vorliegenden Fall stochastischer Payoffs und stochastischer linearer Unabhängigkeit derselben übertragen, wodurch sich in natürlicher Weise eine Aufteilungsmöglichkeit der Wertpapiere in Basis– und Nichtbasiswertpapiere ergibt. Als damit in engem Zusammenhang stehend werden sich Hedge– und Arbitrage–Portfolios erweisen.

Wesentliche Ergebnisse unserer Überlegungen betreffen die Zusammensetzung effizienter Gesamtpositionen aus Basiswertpapieren, Hedge–Portfolios und Kassenhaltung: Die TOBIN-Separation wird in diesem recht allgemeinen Kontext nachgewiesen; weiter wird ein Zusammenhang zwischen der Existenz effizienter (riskanter) Gesamtpositionen und dem sogenannten „Law of One Price" einerseits und einer nicht–trivialen Bewertung der Wertpapiere durch den Finanzmarkt andererseits nachgewiesen. Die Möglichkeit, Mittel in der Kasse zu halten, beschränkt die Rendite von Hedge–Portfolios, so sie existieren, auf nicht–negative Werte und macht das varianzminimale Portfolio stets zu einem ineffizienten, das an der Portfolio–Bildung im Übrigen immer nur in der Form einer Short–Position, niemals „long", beteiligt ist.

Der Beitrag ist wie folgt aufgebaut: Nach Darstellung der Modellbausteine werden in Abschnitt 2 effiziente Gesamtpositionen (bestehend aus Wertpapier-Portfolios und Kassenhaltungspositonen) als Lösung eines drei-dimensionalen Vektormaximumproblems charakterisiert. Das sogenannte „Maximumprinzip der Effizienz" gestattet die Charakterisierung durch drei simultane KUHN–TUCKER Bedingungssysteme. Auf dieser Grundlage werden effiziente Gesamtpositionen (mit und ohne die Existenz von Hedge–Portfolios) konstruiert und in Unterabschnitt 2.6 die Beziehung zwischen Struktur der Marktbewertung und der Existenz von effizienten Gesamtpositionen mit positiver Varianz herausgearbeitet. In Abschnitt 3 wird die Zusammensetzung der in effizienten Gesamtpositionen enthaltenen Portfolios auf zwei Separationsfonds zurückgeführt, für deren Existenz in der Gegenwart von risikolosen Hedge–Portfolios zunächst einmal der Nachweis geführt werden muss. In Abschnitt 4 schließt sich die Zusammenführung der Ergebnisse in die analytisch–geometrische Darstellung an, wobei zugleich nach der zuvor behandelten Strukturfrage die Volumenfrage in Hinsicht auf die aufzunehmenden Portfolios beantwortet wird. Abschnitt 5 verdeutlicht die Zusammenhänge mit graphischer Unterstützung an zwei Beispielen, wovon insbesondere das zweite eine Brücke zur Theorie der Derivatebewertung schlägt. Eine thesenförmige Zusammenfassung in Abschnitt 6 beschließt die Arbeit.

2 Effiziente Gesamtpositionen

2.1 Vorbereitung: Modellbausteine, Portfolios und Gesamtpositionen, Effizienz

Am Markt soll eine beliebige Anzahl n von (beliebig teilbaren[2]) Anlageformen zur Verfügung stehen, die durch ihre Preise P_i ($i = 1, \ldots, n$, zusammen gefasst zum Vektor P) im Betrachtungszeitpunkt und die auf sie entfallenden Rückströme (Payoffs) am Periodenende – gleich ob sie sicher sind oder nicht – charakterisiert werden können; daneben ist noch Kassenhaltung möglich. Die Payoffs sind Zufallsvariablen Z_i ($i = 1, \ldots, n$, zusammen gefasst zum Zufallsvektor Z), deren erste und zweite (multivariate) Momente $\mathrm{E}(Z)$ (Erwartungswerte) und $\mathrm{COV}(Z, Z)$ (Kovarianzmatrix, abgekürzt notiert mit C) existieren.

Definition 1. *Ein* Portfolio *ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der* Payoff dieses Portfolios *ist $Z^T \cdot x$, sein Preis $P^T \cdot x$.*

Definition 2. *Eine* Gesamtposition *ist ein Paar $(x, y_c) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$, bestehend aus einem Portfolio x und einer* Kassenposition *y_c. Der Payoff der Gesamtposition ist $Z^T \cdot x + y_c$, ihr Preis (das* Budget*) $P^T \cdot x + y_c$.*

[2] Fragen, die mangelnde Teilbarkeit oder Nichtmarktfähigkeit von Teilpositionen im Vermögen des Investors betreffen, werden hier ausgespart (vgl. etwa MAYERS (1972) BRITO (1977); RUDOLPH (1982) hat sich in diesem Zusammenhang mit dem Problem eines preisbeeinflussenden monopolistischen Investors befasst).

Wir sind nun für die Definition der Effizienz von Gesamtpositionen gerüstet:

Definition 3. *Eine Gesamtposition $(\bar{x}, \bar{y}_c)$, bestehend aus dem Portfolio $\bar{x}$ und der Kassenposition $\bar{y}_c \geq 0$, heißt (μ, σ, w_0)–**effizient** (im Folgenden gewöhnlich „effizient" ohne Zusatz), wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*
Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}_+$ folgt aus dem Ungleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}(Z^T)\bar{x} + \bar{y}_c \\ -\bar{x}^T C\, \bar{x} \\ -P^T \bar{x} - \bar{y}_c \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathrm{E}(Z^T)x + y \\ -x^T C\, x \\ -P^T x - y \end{pmatrix}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}(Z^T)\bar{x} + \bar{y}_c \\ -\bar{x}^T C\, \bar{x} \\ -P^T \bar{x} - \bar{y}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{E}(Z^T)x + y \\ -x^T C\, x \\ -P^T x - y \end{pmatrix}$$

Diese Definiton fordert, dass die betreffende Position effizient im Sinne eines **Vektormaximumproblems** ist, das als Zielsetzungen die Erwartungswert*maximierung*, Varianz*minmierung* und Budget*minimierung* aufweist. Der klassische Begriff der (μ, σ)–Effizienz betrachtet nur die beiden ersten Zielsetzungen: die Erwartungswert*maximierung* und die Varianz*minmierung*.

Wir kommen nun zu einem ersten Resultat:

Proposition 1. *Die Gesamtposition $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ ist genau dann effizient, wenn es $w_1, w_0, s \in \mathbb{R}$ gibt mit*

1. $w_1 = \mathrm{E}(Z^T)\, \bar{x} + \bar{y}_c = \max\left\{\mathrm{E}(Z^T)\, x + y \mid (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, x^T C\, x \leq s, P^T x + y \leq w_0\right\}$
2. $w_0 = P^T \bar{x} + \bar{y}_c = \min\left\{P^T\, x + y \mid (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, x^T C\, x \leq s, \mathrm{E}\,(Z)^T \cdot x + y \geq w_1\right\}$
3. $s = \bar{x}^T C\, \bar{x} = \min\left\{x^T C\, x \mid (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+, \mathrm{E}\,(Z)^T \cdot x + y \geq w_1, P^T \cdot x + y \leq w_0\right\}$

Korollar zu Proposition 1: *Sei $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ eine effiziente Gesamtposition mit $w_1, w_0, s \in \mathbb{R}$ wie in Proposition 1. Dann sind die folgenden Mengen nicht leer*

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid \mathrm{E}(Z^T)\, x + y = w_1, x^T C\, x \leq s, P^T x + y \leq w_0 \right\}$$
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid P^T\, x + y = w_0, x^T C\, x \leq s, \mathrm{E}\,(Z)^T \cdot x + y \geq w_1 \right\}$$
$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid x^T C\, x = s, \mathrm{E}\,(Z)^T \cdot x + y \geq w_1, P^T \cdot x + y \leq w_0 \right\}$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Maximumprinzip der Effizienz (vgl A.1). q.e.d.

Die Bedingungen 1 bis 3 der Proposition 1 konstituieren jeweils ein nichtlineares Optimierungsproblem; die zugehörigen **Kuhn-Tucker**-Bedingungen (vgl. A.2) notieren wir wie folgt:

Erwartungswertmaximierung Die Bedingungen für das Problem 1 lauten

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(Z)^T - \mu_0 P^T - \mu_2\, \bar{x}^T C &= 0 \\ 1 - \mu_0 &\le 0 \\ \bar{y}_c \cdot (1-\mu_0) &= 0 \\ \bar{y}_c, \mu_0, \mu_2 &\ge 0 \\ w_1 - \mu_0 w_0 - \mu_2\, s &= 0 \end{aligned} \tag{$E \to \max$}$$

Budgetminimerung Die Bedingungen für das Problem 2 lauten

$$\begin{aligned} P^T - \nu_1 \mathrm{E}\,(Z)^T + \nu_2\, \bar{x}^T C &= 0 \\ -1 + \nu_1 &\le 0 \\ \bar{y}_c \cdot (1-\nu_1) &= 0 \\ \bar{y}_c, \nu_1, \nu_2 &\ge 0 \\ w_0 - \nu_1 w_1 + \nu_2\, s &= 0 \end{aligned} \tag{$P \to \min$}$$

Varianzminimierung Die Bedingungen für das Problem 3 lauten

$$\begin{aligned} \bar{x}^T C + \lambda_0 P^T - \lambda_1 \mathrm{E}\,(Z)^T &= 0 \\ -\lambda_0 + \lambda_1 &\le 0 \\ \bar{y}_c \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) &= 0 \\ \bar{y}_c, \lambda_0, \lambda_1 &\ge 0 \\ s + \lambda_0 w_0 - \lambda_1 w_1 &= 0 \end{aligned} \tag{$V \to \min$}$$

Im Folgenden werden wir diese Optimierungsprobleme und ihre Bedingungen systematisch auswerten.

2.2 Effiziente risikolose Gesamtpositionen?

Risikolose Gesamtpositionen sind in den Bedingungssystemen (E-max), (P-min) und (V-min) durch $s = 0$ gekennzeichnet. Insbesondere muss für das effiziente Portfolio in einer solchen Gesamtposition $\bar{x}^T C\, \bar{x} = 0$ gelten; da C als Kovarianzmatrix positiv semidefinit ist, muss also $C\, \bar{x} = 0$ gelten. Die Bedingungssysteme lauten daher

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(Z)^T - \mu_0 P^T &= 0 \\ 1 - \mu_0 &\le 0 \\ \bar{y}_c \cdot (1-\mu_0) &= 0 \\ \bar{y}_c, \mu_0 &\ge 0 \\ w_1 - \mu_0 w_0 &= 0 \end{aligned} \tag{$E \to \max - r_f$}$$

$$
\begin{aligned}
P^T - \nu_1 \mathrm{E}(Z)^T &= 0 \\
-1 + \nu_1 &\leq 0 \\
\bar{y}_c \cdot (1 - \nu_1) &= 0 \qquad\qquad (P \to \min - r_f) \\
\bar{y}_c, \nu_1 &\geq 0 \\
w_0 - \nu_1 w_1 &= 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 P^T - \lambda_1 \mathrm{E}(Z)^T &= 0 \\
-\lambda_0 + \lambda_1 &\leq 0 \\
\bar{y}_c \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) &= 0 \qquad\qquad (V \to \min - r_f) \\
\bar{y}_c, \lambda_0, \lambda_1 &\geq 0 \\
\lambda_0 w_0 - \lambda_1 w_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Diese Bedingungen lassen sich wie folgt in einem Satz zusammenfassen:

Proposition 2. *Effiziente risikolose Gesamtpositionen exisitieren nur dann, wenn der Preis- und der Erwartungswertvektor linear abhängig sind, d.h. wenn eine Relation $\alpha \cdot \mathrm{E}(Z) - \beta \cdot P = 0$ gegeben ist. Ist in einer solchen Gesamtposition der Kassenbestand positiv, so gilt $\alpha = \beta$. Ist der Kassenbestand gleich null, so kann man $0 \leq \alpha \leq \beta$ wählen.*

Definition 4. *Wenn die Vektoren $\mathrm{E}(Z)$ und P linear abhängig sind, sagen wir, der Markt bewerte* erwartungswertproportional. *Diese Definition beziehen wir auch auf Teilmengen der Wertpapiere.*

Definition 5. *Bei gegebenem $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sprechen wir von $\mathrm{E}(Z) - \lambda P$ als vom Vektor der* Risikoprämien bezüglich der Rendite $\lambda - 1$.

Der Markt bewertet erwartungswertproportional, wenn es eine Rendite $\lambda - 1$ gibt, für die alle Risikoprämien gleich null sind.
Korollar: *Effiziente risikolose Gesamtpositionen gibt es nur, wenn der Markt erwartungswertproportional bewertet.*
Beweis: Für $\beta \neq 0$ gilt $P = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \mathrm{E}(Z)$, für $\alpha \neq 0$ gilt $\mathrm{E}(Z) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot P$. q.e.d.

2.3 Effiziente Gesamtpositionen, wenn keine Hedge–Portfolios existieren

Definition 6. *Ein von null verschiedenes Portfolio, dessen Varianz gleich null ist, heißt ein* Hedge–Portfolio.

Gibt es unter den herrschenden Marktbedingungen keine Hedge–Portfolios, dann gilt $x \neq 0 \Longrightarrow x^T C x \neq 0$, aber auch $x \neq 0 \Longrightarrow x^T C \neq 0$. Gibt es keine Hedge-Portfolios, kann eine risikolose Gesamtposition folglich nur aus der Kassenhaltung bestehen. Wir können nun das folgende Strukturergebnis für Portfolios in effizienten Gesamtpositionen mit Kassenhaltungsbeteiligung mitteilen:

Proposition 3. *Existieren keine Hedge-Portfolios, dann gilt für das Portfolio $\bar{x}$ in einer effizienten Gesamtposition $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ mit (aktiver) Kassenhaltung ($\bar{y}_c > 0$)*

$$\mu_2\,\bar{x} = C^{-1}\left\{\mathrm{E}\left(Z\right) - P\right\},\; \mu_2\; \geq 0$$

Beweis: Man betrachte (*E-max-r_f*) und (*P-min-r_f*). Ist $\bar{y}_c > 0$, muss $\mu_0 = \nu_1 = 1$ sein. Die Bedingungen für die Probleme (*E-max-r_f*) und (*P-min-r_f*) implizieren jeweils die Behauptung. q.e.d.

Korollar: *Strukturell bestimmen die Risikoprämien bezüglich der Kassenrendite (d.h. bezüglich einer Rendite von null) das Portfolio in einer effizienten Gesamtposition.*

Ein entsprechendes Ergebnis kennzeichnet den Fall ohne (aktive) Kassenhaltung:

Proposition 4. *Existieren keine Hedge-Portfolios, dann gilt für das Portfolio $\bar{x}$ in einer effizienten Gesamtposition $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ ohne Kassenhaltung ($\bar{y}_c = 0$)*

$$\bar{x} = \lambda_1 C^{-1}\mathrm{E}\left(Z\right) - \lambda_0 C^{-1}P$$

mit $\lambda_1, \lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \leq \lambda_0$, $\lambda_1 + \lambda_0 \neq 0$.

Beweis: Das folgt direkt aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen des Problems (*V-min*). q.e.d.

Korollar: *Ist unter den Voraussetzungen der Proposition 4 $\lambda_1 > 0$, so werden die Portfolios in einer effizienten Gesamtposition strukturell durch die Risikoprämien bezüglich der Rendite $\lambda_0/\lambda_1 - 1$ bestimmt.*

2.4 Hedge–Portfolios, wenn effiziente Gesamtpositionen existieren

Wenn der Markt effiziente Gesamtpositionen bereit stellt, gibt es für Hedge–Portfolios Einschränkungen. Wir untersuchen eine effiziente Gesamtposition $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ und ein beliebiges Hedge–Portfolio ξ. Die Bedingungen (E-max), (P-min) und (V-min) führen durch Multiplikation mit dem Hedge–Portfolio zu folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Z\right)^T \xi - \mu_0 P^T \xi &= 0 \\ P^T \xi - \nu_1 \mathrm{E}\left(Z\right)^T \xi &= 0 \\ \lambda_0 P^T \xi - \lambda_1 \mathrm{E}\left(Z\right)^T \xi &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgern wir:

Proposition 5. *In einem Markt, in dem effiziente Gesamtpositionen existieren, gilt für Hedge–Portfolios:*

1. *Ist der Preis des Hedge–Portfolios gleich null, so ist sein (erwarteter) Payoff gleich null.*

2. *Ist der (erwartete) Payoff des Hedge–Portfolios gleich null, so ist sein Preis gleich null.*

3. *Hedge–Portfolios mit einem von null verschiedenen Preis bzw. (erwarteten) Payoff haben dieselbe Rendite*
$$r_f = \frac{\mathrm{E}\left(Z\right)^T v}{P^T v} - 1 = \mu_0 - 1 = \frac{1}{\nu_1} - 1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \geq 0.$$

Bemerkung. *Proposition 5 liefert eine Variante des „Law of Indifference" (*JEVONS *(1888), S. 87 u. S. 90), heute meist unter der Bezeichnung „Law of One Price" verwendet.*

Bemerkung. *Die Varianten von Hedge–Portfolios, für die die Voraussetzung von 2 in der Proposition 5 zutrifft, heißen „*Arbitrageportfolios*" (*MERTON *(1973)). Zwei linear unabhängige Hedge–Portfolios lassen sich stets zu einem Arbitrageportfolio kombinieren.*

2.5 Effiziente Gesamtpositionen, wenn Hedge–Portfolios existieren

Schließlich betrachten wir eine effiziente Gesamtposition $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ (die eine positive Varianz aufweist), wenn zugleich Hedge–Portfolios zur Verfügung stehen. Hier können wir feststellen:

Proposition 6. *Exstieren Hedge–Portfolios und ist $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ eine effiziente Gesamtposition mit positiver Varianz, so ist*

$$C\,\bar{x} = \lambda_1 \left\{ \mathrm{E}\,(Z) - \left(1 + r_f\right) P \right\}$$

Beweis: Wendet man die Bedingungen des Problems (*V-min*) auf ein Hedge-Portfolio ξ an und multipliziert mit diesem durch, ergibt sich $\lambda_0 P^T \xi = \lambda_1 \mathrm{E}\,(Z)^T \xi$. Daraus folgt der Rest, wenn man bedenkt, dass λ_0 und λ_1 nicht beide gleich null sein können, weil die effiziente Gesamtposition sonst risikofrei wäre. q.e.d.

Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Proposition 6 werden die Portfolios in einer effizienten Gesamtposition strukturell durch die Risikoprämien bezüglich der risikofreien Rendite (Rendite der Hedge–Portfolios) bestimmt.*

2.6 Effizienz und Erwartungswertproportionalität der Preise

Unabhängig davon, ob Hedge–Portfolios existieren oder nicht, hat die Existenz von effizienten Gesamtpositionen mit positiver Varianz eine Implikation für die Bewertung der Payoffs durch den Markt. Eine effiziente Gesamtposition mit positiver Varianz erfordert nach (V-min) $\lambda_1 w_1 - \lambda_0 w_0 = s > 0$, also $\lambda_1 w_1 > \lambda_0 w_0$, wobei $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq 0$, $\lambda_0 + \lambda_1 > 0$ gilt.

Proposition 7. *Sei $(\bar{x}, \bar{y}_c)$ eine effiziente Gesamtposition mit positiver Varianz. Dann sind $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$, es sei denn P und $\mathrm{E}\,(Z)$ sind proportional, d.h. der Markt bewertet erwartungswertproportional.*

Beweis: Es gilt $\bar{x}^T C + \lambda_0 P^T - \lambda_1 \mathrm{E}\,(Z)^T = 0$. Aus der Tatsache, dass das Portfolio eine positive Varianz aufweist, folgt $C \cdot \bar{x} \neq 0$; daher kann man die Bedingungen von Problem (*V-min*) mit denen von Problem (*E-max*) und (*P-min*) derart kombinieren, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\,(Z)\,(1 - \mu_2 \lambda_1) &= P\,(\mu_0 - \mu_2 \lambda_0) \\ \mathrm{E}\,(Z)\,(\nu_1 - \nu_2 \lambda_1) &= P\,(1 - \nu_2 \lambda_0) \end{aligned}$$

resultiert; sind P und $\mathrm{E}\,(Z)$ linear unabhängig, folgt daher insbesondere $1 - \mu_2 \lambda_1 = 0$ und $1 - \nu_2 \lambda_0 = 0$; daher kann weder $\lambda_0 = 0$ noch $\lambda_1 = 0$ gelten. q.e.d.

Zusammenfassung. *Wenn der Markt nicht erwartungswertporportional bewertet, ist ein in einer effizienten Gesamtposition enthaltenes Portfolio mit positiver Varianz stets Lösung der Gleichung*

$$C\,x = \lambda_1 \mathrm{E}\,(Z) - \lambda_0 P$$

mit strikt positiven Faktoren λ_0 und λ_1 und $\lambda_1 \leq \lambda_0$, . Wir bezeichnen als Separationsfonds *Lösungen der Gleichungen $C\,z_0 = P_0$ bzw. $C\,z_1 = \mathrm{E}\,(P_1)$. Die in einer effizienten Gesamtposition enthaltenen Portfolios mit positiver Varianz, positivem Erwartungswert und positivem Budget lassen sich auch als Linearkombination $\bar{x} = \lambda_1 z_1 - \lambda_0 z_0$ der Separationsfonds schreiben, falls sie existieren.*

Wegen der Vorzeichen von λ_1, λ_0 ist dabei jedes in einer effizienten Gesamtposition enthaltene Portfolio durch den **Kauf des Fonds** z_1 (im Umfang von λ_1) und den **(Leer-)Verkauf des Fonds** z_0 (im Umfang von λ_0) gekennzeichnet, insbesondere wird der Fonds z_0 als solcher **nie gekauft**. Auf Existenz und Bedeutung dieser Fonds kommen wir im nächsten Abschnitt zu sprechen.

3 Die Struktur der in effizienten Gesamtpositionen gehaltenen Portfolios: Separationsfonds

3.1 Markt ohne Hedge-Portfolios

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass Separationsfonds existieren, wenn keine Hedge-Portfolios existieren, dann lassen sie sich nämlich durch Matrixinversion wie folgt bestimmen (in dem Fall stimmen C und C^* überein)

$$\begin{aligned} z_0 &= C^{-1} P \\ z_1 &= C^{-1} \mathrm{E}\,(Z) \end{aligned}$$

3.2 Markt mit Hedge-Portfolios

Betrachten wir nun den Fall, in dem Hedge-Portfolios konstruiert werden können. In diesem Fall sind die Payoffs Z der Wertpapiere **stochastisch linear** abhängig. Zum Verständnis die folgende Definition (RICHTER (1966)):

Definition 7. *Eine endliche Menge von Zufallsvariablen $\{X_1, \ldots, X_p\}$ heißt* stochastisch linear unabhängig, *wenn daraus, dass $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i$ (fast) sicher eine sichere Größe ist, folgt, dass alle α_i ($i = 1, \ldots, p$) gleich null sind. Sonst heißt die Menge* stochastisch linear abhängig.

Da wir in diesem Beitrag (unausgesprochen) stets davon ausgehen, dass für alle relevanten Zufallsvariablen die ersten beiden Momente existieren, können wir die stochastische lineare Unabhängigkeit auch durch eine Eigenschaft der Kovarianzmatrix charakterisieren:

Proposition 8. *Eine endliche Menge von Zufallsvariablen $\{X_1, \ldots, X_p\}$,deren erste und zweite Momente existieren, ist genau dann stochastisch linear unabhängig, wenn die Kovarianzmatrix*

$$C_X := \mathrm{COV}\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}\right)$$

nicht singulär ist.

Beweis: Zunächst macht man sich klar, dass die stochastische lineare Unabhängigkeit unter der Voraussetzung der Proposition äquivalent mit der Implikation ($\alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{var}\left(\alpha^T X\right)$ > 0) ist. Nun gilt $\mathrm{var}\left(\alpha^T X\right) = \alpha^T C_X\, \alpha$.
Sei nun zunächst die Kovarianzmatrix singulär: Dann existiert nach Definition ein $\alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha \neq 0$ mit $C_X\, \alpha = 0$, dann ist aber erst recht $\alpha^T C_X\, \alpha = 0$.
Sei umgekehrt $\alpha^T C_X\, \alpha = 0$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}^p, \alpha \neq 0$. Dann ist $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i$ (fast) sicher und folglich $\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_i, X_j\right) = 0$ für alle $j = 1, \ldots, p$. Zusammengefasst ergibt sich $\alpha^T C_X = 0$.
Beide Annahmen führen daher zu einem Widerspruch, womit der Beweis geführt ist. q.e.d.

Es ist einfach einzusehen, dass die stochastische lineare Unabhängigkeit von $\{X_1, \ldots, X_p\}$ mit der (gewöhnlichen) linearen Unabhängigkeit von $\{X_1 - \mathrm{E}(X_1), \ldots, X_p - \mathrm{E}(X_p)\}$ äquivalent ist. Daher können wir ohne eine ins Einzelne gehende Erläuterung von einer stochastischen linearen **Basis** von $\{X_1, \ldots, X_p\}$ sprechen, die die Menge $\{X_1, \ldots, X_p\}$ „aufspannt". Wir wählen eine solche stochastisch lineare Basis der Wertpapier–Payoffs aus, fassen sie in dem Vektor Z^* zusammen (von den zugehörigen Wertpapieren sprechen als den „**Basiswertpapieren**"), während wir die übrigen Wertpapier–Payoffs in dem Vektor $\bar{Z}$ zusammenstellen („**Nicht-Basiswertpapiere**"). Wir nehmen o.B.d.A. die folgende Anordnung vor:

$$Z = \begin{pmatrix} \bar{Z} \\ Z^* \end{pmatrix}.$$

Entsprechend verfahren wir mit den übrigen Größen (z.B. $P = \begin{pmatrix} \bar{P} \\ P^* \end{pmatrix}$; $C^* = \mathrm{COV}(Z^*, Z^*)$; $C = \begin{pmatrix} \mathrm{COV}(\bar{Z}, \bar{Z}) & \mathrm{COV}(\bar{Z}, Z^*) \\ \mathrm{COV}(Z^*, \bar{Z}) & C^* \end{pmatrix}$). Es gibt bei einmal gewählter Basis eine eindeutig bestimmt Matrix $\bar{A}$, die den Zusammenhang

$$\bar{Z} - \mathrm{E}(\bar{Z}) = \bar{A}\ (Z^* - \mathrm{E}(Z^*))$$

bzw.

$$\begin{aligned} Z - \mathrm{E}(Z) &= A\,(Z^* - \mathrm{E}(Z^*)) \\ \text{mit } A &= \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \boldsymbol{id} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

herstellt, der die Payoffs aller Wertpapiere auf (ihre Erwartungswerte und) die Payoffs der Basiswertpapiere zurückführt. Hedge-Portfolios $\xi \in \mathbb{R}^n$ lassen sich dann einfach durch die Bedingung $\xi^T \cdot A = 0$ charakterisieren:

Proposition 9. *Die (nichttrivialen) Lösungen des Gleichungssystems $A^T\xi = 0$ sind genau die Hedge–Portfolios.*

Korollar: *Arbitrage–Portfolios sind genau die Portfolios ξ, für die $A^T\xi = 0$* und $\mathrm{E}(Z)^T\,\xi = 0$ *gilt, d.h.* $\begin{pmatrix} A^T \\ \mathrm{E}(Z)^T \end{pmatrix} \xi = 0$ *ist.*

Zu vermuten ist, dass es einen Zusammenhang zwischen den Preisen für Nicht-Basiswertpapiere und denen der Basiswertpapiere gibt. Dazu zeigen wir die folgende

Proposition 10. *Gibt es eine effiziente Gesamtposition mit positiver Varianz, dann gilt*

$$\mathrm{E}(\bar{Z}) - \left(1 + r_f\right)\bar{P} = \bar{A}\left(\mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right)P^*\right)$$

d.h. die erwarteten Risikoprämien der Nicht-Basiswertpapiere ergeben sich durch dieselbe lineare Transformation aus den Risikoprämien der Basiswertpapiere, die die Payoffs der Nicht-Basiswertpapiere mit denen der Basiswertpapiere verknüpft.

Bemerkung. *Proposition 10 liefert eine weitere Variante des „Law of One Price"; diese Variante ist Basis der auf Arbitrage fußenden Optionspreistheorie (s. dazu unten das zweite Beispiel).*

Beweis: Sei $\bar{x}$ ein effizientes Portfolio mit positiver Varianz; für dieses Portfolio gilt gemäß (P-min):

$$P - \nu_1\mathrm{E}(Z) + \nu_2\,C\,\bar{x} = 0$$

Aufgefächert nach Basis- und Nicht-Basiswertpapieren ergibt sich:

$$\begin{gathered} \bar{P} - \nu_1\mathrm{E}(\bar{Z}) + \nu_2\,\bar{A}C^*A^T\,\bar{x} = 0 \\ P^* - \nu_1\mathrm{E}(Z^*) + \nu_2\,C^*A^T\,\bar{x} = 0 \\ \Longrightarrow \bar{P} - \nu_1\mathrm{E}(\bar{Z}) = \bar{A}\,(P^* - \nu_1\mathrm{E}(Z^*)) \\ \Longrightarrow \mathrm{E}(\bar{Z}) - \left(1 + r_f\right)\bar{P} = \bar{A}\left(\mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right)P^*\right) \end{gathered}$$

und daher die Behauptung. q.e.d.

Korollar: *Es gilt sogar*

$$\mathrm{E}(Z) - \left(1 + r_f\right) P = A \left(\mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right) P^*\right)$$

Korollar: *Ist ξ ein Arbitrageportfolio, so gilt $\xi^T P = 0$.*

Bemerkung. *Dieses Korollar ist Grundlage der arbitragefreien Bewertung in der Optionspreistheorie: Man löst die Gleichung $\xi^T P = 0$ nach dem Preis des zu bewertenden Nicht-Basiswertpapier auf.*

Wir kommen nun zur Konstruktion der Separationsfonds für den Fall, in dem Hedge-Portfolios existieren. Formal gesehen, suchen wir Lösungen z_0, z_1 für die Gleichungen

$$\begin{aligned} C\, z_0 &= P \\ C\, z_1 &= \mathrm{E}(Z) \end{aligned}$$

Als Lösungen inhomogener linearer Gleichungen sind sie durch Angabe einer partikulären Lösung und der Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung bestimmt. Betrachten wir zunächst die homogene(n) Gleichung(en):

$$C\,\xi = 0$$

Nun gilt $C = \mathrm{COV}(Z, Z) = A\mathrm{COV}(Z^*, Z^*)\, A^T = AC^* A^T$. Weiter bedenken wir die besondere Struktur von A und folgern

$$C\,\xi = 0 \Leftrightarrow C^* A^T \xi = 0$$

Da C^* invertierbar ist, sind die Lösungen des homogenen Gleichungssystems durch die Lösungen des Systems $A^T \xi = 0$ gegeben, d.h. durch die **Menge der Hedge-Portfolios**.

Zur Konstruktion von partikulären Lösungen blicken wir näher auf die Gleichungssysteme, wie sie sich ergeben, wenn wir den Zusammenhang $C = AC^* A^T$ verwenden:

$$\begin{aligned} AC^* A^T z_0 &= P \\ AC^* A^T z_1 &= \mathrm{E}(Z) \end{aligned}$$

Erneut die besondere Struktur von A in Rechnung stellend, finden wir

$$\begin{aligned} C^* A^T z_0 &= P^* \\ C^* A^T z_1 &= \mathrm{E}(Z^*) \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} A^T z_0 &= C^{*-1} P^* \\ A^T z_1 &= C^{*-1} \mathrm{E}(Z^*) \end{aligned}$$

folgt. Daher kann man als partikuläre Lösungen

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{*-1} P^* \end{pmatrix}$$

und

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{*-1}\mathrm{E}(Z^*) \end{pmatrix}$$

wählen. Wir fassen zusammen

Proposition 11. *Separationsfonds existieren und können wie folgt gewählt werden:* $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{*-1}P^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0^* \end{pmatrix}$ *und* $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ C^{*-1}\mathrm{E}(Z^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z_1^* \end{pmatrix}$*. Darüber hinaus eignen sich als Separationsfonds alle Portfolios die sich aus den speziellen Fonds durch Hinzufügen von Hedge-Portfolios konstruieren lassen.*

Korollar: *Es gibt zwei linear unabhängige Separationsfonds genau dann, wenn die Basiswertpapiere nicht erwartungswertproportional bewertet werden.*

3.3 Die Portfoliostruktur

Die gerade konstruierten speziellen Separationsfonds erlauben eine ökonomische Interpretation:

1. Der Fonds y_0^* ist Lösung des Problems

   $$\begin{aligned} \frac{1}{2} z^T C^* z &\rightarrow \text{min!} \\ z^T \cdot P^* &= w_0^* > 0 \end{aligned}$$

   Die Lösungsbedingungen lauten nämlich

   $$C^* z = \lambda \cdot P^*$$

   mit

   $$w_0^* = \lambda \cdot P_0^{*^T} C^{*-1} \cdot P_0^*$$

   Setzt man also das Budget mit $w_0^* = P^{*^T} C^{*-1} \cdot P^* > 0$ an, so ist das Gewünschte gezeigt. Damit erweist sich z_0 (bis auf Hedge-Portfolios) als das **die Varianz minimierende riskante Portfolio** *mit Budget-Beschränkung, aber ohne Beschränkung des Erwartungswertes*. Dieses Portfolio wird aber im Rahmen einer **effizienten** Portfoliozusammenstellung nicht **ge**kauft, sondern **(leer)ver**kauft, wie wir weiter oben schon gesehen haben..

2. Der Fonds z_1^* ist dementsprechend Lösung des Problems

   $$\begin{aligned} \frac{1}{2} z^T C^* z &\rightarrow \text{min!} \\ z^T \cdot \mathrm{E}(Z^*) &= w_1^* > 0 \end{aligned}$$

Damit erweist sich z_1 (bis auf Hedge-Portfolios) als das **die Varianz minimierende riskante Portfolio** *ohne Budget-Beschränkung, aber mit Beschränkung des Erwartungswertes*. Nun lassen sich die in effizienten Gesamtpositionen enthaltenen Portfolios wie folgt charakterisieren:

Proposition 12. *Die in effizienten Gesamtpositionen enthaltenen Portfolios ergeben sich zu:*

$$x = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z_1^* \end{pmatrix} - \lambda_0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ z_0^* \end{pmatrix} + \xi$$

mit geeigneten $\lambda_0 \geq \lambda_1 > 0$ *und einem geeigneten Hedge-Portfolio* ξ.

Korollar: *Der varianzminimale Separationsfonds ist stets in bestimmtem Umfang als Short–Position an einer effizienten Gesamtposition beteiligt.*

Bemerkung. *Die Zusammensetzung der in einer effizienten gesamtposition enthaltenen Portfolios ähnelt der einer „gehebelten" Position, in der eine Longposition mit einer Shortposition miteinander verbunden sind.*

Die folgende Proposition gibt Auskunft über bestimmte Eigenschaften der Separationsfonds, die, wie wir sehen werden, die Risiko-Allokationsmöglichkeiten des Marktes charakterisieren:

Proposition 13. *Die Kovarianzmatrix der (Payoffs der) beiden Separationsfonds ist durch*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} : \quad &= \mathrm{COV}\left(\begin{pmatrix} Z^T \cdot z_0 \\ Z^T \cdot z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Z^T \cdot z_0 \\ Z^T \cdot z_1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{(Fundamentalmatrix)} \\ &= \begin{pmatrix} {P^*}^T C^{*-1} P^* & {P^*}^T C^{*-1} \mathrm{E}(Z^*) \\ {P^*}^T C^{*-1} \mathrm{E}(Z^*) & \mathrm{E}\left({Z^*}^T\right) C^{*-1} \mathrm{E}(Z^*) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis: Das folgt durch Einsetzen. q.e.d.

Bemerkung. *Die Matrix* $\boldsymbol{B}$ *wird auch als* Fundamentalmatrix des Kapitalmarktes *bezeichnet.*

Korollar 1 zur Proposition 13: *Der Preis des Separationsfonds* z_0^* *beträgt*

$${P^*}^T C^{*-1} P^*$$

und ist daher positiv.

Korollar 2 zur Proposition 13: *Der Erwartungswert des Separationsfonds* z_1^* *beträgt*

$$\mathrm{E}\left({Z^*}^T\right) C^{*-1} \mathrm{E}(Z^*)$$

und ist daher positiv.

Es folgt

Proposition 14. *Die Matrix (Fundamentalmatrix) ist indefinit genau dann, wenn P^* und $\mathrm{E}(Z^*)$ linear abhängig sind, d.h. wenn der Markt die Basiswertpapiere erwartungswertproportional bewertet.*

Beweis: Die betreffende Matrix ist indefinit genau dann, wenn die Rückströme der beiden Fonds stochastisch linear abhängig sind. Die folgenden Implikationen führen nun zum Beweis der Behauptung:

$$\begin{aligned}\left(\alpha {z_0^*}^T - \beta {z_1^*}^T\right) \cdot Z &= a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha z_0^* = \beta z_1^* \\ &\Longrightarrow C^{*-1} \cdot (\alpha P^* - \beta\, \mathrm{E}(Z^*)) = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha P^* - \beta\, \mathrm{E}(Z^*) = 0\end{aligned}$$

q.e.d.

Eine andere Darstellung der Fundamentalmatrix ist

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} {P^*}^T z_0^* & {P^*}^T z_1^* \\ \mathrm{E}(Z^*)^T z_0^* & \mathrm{E}(Z^*)^T z_1^* \end{pmatrix}$$

4 Die Effizienzlinie: Die effizienten Gesamtpositionen

4.1 Die Geometrie im Kontext von Varianz, Erwartungswert und Budget

Definition 8. *Der funktionale Zusammenhangs zwischen Varianz (bzw. Standardabweichung), Erwartungswert und Budget effizienter Gesamtpositionen heißt* ***Effizienzlinie*** *(oder* ***effizienter Rand****).*

Im Folgenden bestimmen wir die Effizienzlinie auf der Basis der bisher gewonnenen Erkenntnisse:

1. **Keine Hedge-Portfolios**: In dem zunächst zu diskutierenden Fall, in dem der Markt die Konstruktion von Hedge-Portfolios **nicht** zulässt, gilt $\bar{x} = \mu_2\, C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\}$ für das Wertpapier-Portfolio, wenn die *Kassenhaltung aktiv* ist, und $x = \lambda_1 \cdot C^{-1}\mathrm{E}(Z) - \lambda_0 \cdot C^{-1}P$ mit $\lambda_1, \lambda_0 > 0$, wenn die *Kassenhaltung nicht aktiv* ist.

   (a) Für den Fall **aktiver Kassenhaltung** in Höhe von y_c ergibt sich

$$\begin{aligned} w_0 &= y_c + \frac{1}{\mu_2} P^T C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\} \\ w_1 &= y_c + \frac{1}{\mu_2} \mathrm{E}(Z)^T C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\} \\ \Longrightarrow & \frac{1}{\mu_2} \left[\mathrm{E}(Z)^T C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\} - P^T C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\}\right] = w_1 - w_0 \\ \Longrightarrow & \frac{1}{\mu_2} = \frac{w_1 - w_0}{\{\mathrm{E}(Z^T) - P^T\}\, C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\}} \end{aligned}$$

Für die Varianz rechnet man nun

$$s = \frac{(w_1 - w_0)^2}{\{\mathrm{E}(Z^T) - P^T\} C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\}} \tag{1}$$

Die Bedingung, unter der aktive Kassenhaltung ($y_c > 0$) sinnvoll ist, lässt sich wie folgt bestimmen: Notwendig ist

$$w_1 \cdot P^T C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\} < w_0 \cdot \mathrm{E}\left(Z^T\right) C^{-1} \{\mathrm{E}(Z) - P\}$$

(b) Ist die **Kassenhaltung nicht aktiv**, gilt $s = \lambda_1 \cdot w_1 - \lambda_0 \cdot w_0$ und

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Folglich gilt bei nicht erwartungswertproportional bewertendem Markt

$$s = \begin{pmatrix} w_0 & w_1 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Bei nicht aktiver Kassenaltung müssen zwei weitere Bedingungen erfüllt sein, die sich aus $(\lambda_0, \lambda_1) \gg 0$ ergeben:

$$\begin{aligned} w_0 &< w_1 \frac{\mathrm{E}(Z^T) C^{-1} P}{\mathrm{E}(Z^T) C^{-1} \mathrm{E}(Z)} \\ w_1 &> w_0 \frac{\mathrm{E}(Z^T) C^{-1} P}{P^T C^{-1} P} \end{aligned}$$

2. **Hedge-Portfolios**: Es bleibt der Fall zu diskutieren, in dem es Hedge-Portfolios gibt. In diesem Fall sind effiziente Gesamtpositionen mit dem Portfolio $\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix}$ durch

$$\bar{x} = \lambda_1 \left\{ C^{*-1} \mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right) C^{*-1} P^* \right\} + \xi$$

gegeben, wobei ξ ein Hedge-Portfolio ist. Wir haben wieder

$$\begin{aligned} w_0 &= P^T z + \lambda_1 P^{*T} C^{*-1} \left\{ \mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right) P^* \right\} \\ w_1 &= \left(1 + r_f\right) P^T z + \lambda_1 \mathrm{E}(Z^*)^T C^{*-1} \left\{ \mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right) P^* \right\} \\ \implies \lambda_1 &= \frac{w_1 - \left(1 + r_f\right) w_0}{\left\{ \mathrm{E}(Z^{*T}) - \left(1 + r_f\right) P^{*T} \right\} C^{*-1} \left\{ \mathrm{E}(Z^*) - \left(1 + r_f\right) P^* \right\}} \end{aligned}$$

und können die Varianz zu

$$s = \frac{\left(w_1 - \left(1 + r_f\right) w_0\right)^2}{\left\{\mathrm{E}\left(Z^{*T}\right) - \left(1 + r_f\right) P^{*T}\right\} C^{*-1} \left\{\mathrm{E}\left(Z^*\right) - \left(1 + r_f\right) P^*\right\}} \tag{3}$$

bestimmen.

4.2 Welche Portfolios werden in effizienten Gesamtpositionen gehalten? Die Volumenkomponente

Diese Frage zu stellen, bedeutet nach der numerischen Höhe der Multiplikatoren λ_0, λ_1 und μ_2 zu fragen und dabei zu berücksichtigen, dass (1), (2) und (3) alternativ gelten. Es ist wieder sinnvoll, die Fälle mit und ohne die Existenz von Hedge-Portfolios zu trennen.

4.2.1 Wenn Hedge-Portfolios existieren

Wenn Hedge-Portfolios existieren, ist Kassenhaltung inferior, sobald die Rendite r_f größer ist als null. Ist die Rendite gleich null, sind Kassenhaltung und Hedge-Portfolios gleichwertig, solange Hedge-Portfolios mit positivem Marktwert (Netto-Anlage) in Rede stehen. Hedge-Portfolios mit negativem Marktwert (Kreditaufnahme) können durch Kassenhaltung nicht ersetzt werden; folglich gilt:

Proposition 15. *Gibt es effiziente Gesamtpositionen und existieren Hedge-Portfolios, dann wird Kassenhaltung nicht aktiv oder kann gleichwertig durch Investition in Hedge-Portfolios ersetzt werden.*

Die effiziente Linie (3) ist in diesem Fall in w_1 streng monoton steigend (für $w_1 > \left(1 + r_f\right) w_0$) und in w_0 unter derselben Bedingung streng monoton fallend, daher sind alle Gesamtpositionen $\begin{pmatrix} 0 & \\ & , \bar{y}_c \\ \bar{x} & \end{pmatrix}$ mit $\bar{y}_c = 0$ und

$$\bar{x} = \lambda_1 \left\{C^{*-1}\mathrm{E}\left(Z^*\right) - \left(1 + r_f\right) C^{*-1} P^*\right\} + \xi$$

effizient, wenn ξ ein Hedge-Portfolio und

$$\lambda_1 = \frac{w_1 - \left(1 + r_f\right) w_0}{\left\{\mathrm{E}\left(Z^{*T}\right) - \left(1 + r_f\right) P^{*T}\right\} C^{*-1} \left\{\mathrm{E}\left(Z^*\right) - \left(1 + r_f\right) P^*\right\}} \geq 0$$

ist.

Wird kein Hedge–Portfolio in Anspruch genommen, gilt

$$\lambda_1 = \frac{w_0}{P^{*T} C^{*-1} \left\{\mathrm{E}\left(Z^*\right) - \left(1 + r_f\right) P^*\right\}}$$

und

$$\frac{\mathrm{E}\left(Z\right)^{T}\left(z_{1}-\left(1+r_{f}\right)z_{0}\right)}{\mathrm{P}^{T}\left(z_{1}-\left(1+r_{f}\right)z_{0}\right)}=\frac{w_{1}}{w_{0}}$$

4.2.2 Wenn keine Hedge-Portfolios existieren.

Existieren keine Hedge-Portfolios, kann die effiziente Linie durch das Minimum von (1) und (2)

$$s=\min\left\{\frac{\left(w_{1}-w_{0}\right)^{2}}{\left\{\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)-P^{T}\right\}C^{-1}\left\{\mathrm{E}\left(Z\right)-P\right\}},\begin{pmatrix} w_{0} & w_{1}\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} w_{0}\\ w_{1}\end{pmatrix}\right\}$$

beschrieben werden.

1. Die linke Alternative im Minimum hat als Gradienten

$$\nabla s=2\begin{pmatrix}\frac{w_{0}-w_{1}}{\left\{\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)-P^{T}\right\}C^{-1}\left\{\mathrm{E}(Z)-P\right\}} & \frac{w_{1}-w_{0}}{\left\{\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)-P^{T}\right\}C^{-1}\left\{\mathrm{E}(Z)-P\right\}}\end{pmatrix}$$

   und damit das erwartete Monotonieverhalten: Ist $w_1 > w_0$ (dann kann nicht alles in die Kasse investiert sein), dann sinkt die Varianz längs der Effizienzlinie mit steigendem Mitteleinsatz und steigt mit steigendem Erwartungswert; $w_1 < w_0$ führt hingegen zu ineffizienten Investitionen, da mindestens die Kassenhaltung besser wäre.

2. Für die rechte Alternative gilt einerseits

$$\begin{aligned}\nabla s &= 2\,\frac{1}{\det\left(\boldsymbol{B}\right)}\begin{pmatrix} w_{0}\cdot\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)C^{-1}\mathrm{E}\left(Z\right)-w_{1}\cdot\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)C^{-1}P\\ w_{1}\cdot P^{T}C^{-1}P-w_{0}\cdot\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)C^{-1}P\end{pmatrix}^{T}\\ &= 2\,\frac{1}{\det\left(\boldsymbol{B}\right)}\begin{pmatrix}\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)\cdot\left[w_{0}\,y_{1}-w_{1}\,y_{0}\right]\\ P^{T}\cdot\left[w_{1}\,y_{0}-w_{0}\,y_{1}\right]\end{pmatrix}^{T}\end{aligned}$$

   und andererseits

$$\nabla s=2\begin{pmatrix} w_{0} & w_{1}\end{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}=2\begin{pmatrix}-\lambda_{0} & \lambda_{1}\end{pmatrix}$$

   Hierbei wissen wir

$$\lambda_{0}\geq\lambda_{1}>0$$

   Folglich gilt: Die Varianz sinkt längs der Effizienzlinie bei *c.p.* steigendem Mitteleinsatz und steigt mit *c.p.* steigendem Erwartungswert. Zulässig, d.h. effizient, sind dabei nur Kombinationen von Mitteleinsatz und Erwartungswert mit $\mathrm{E}\left(Z^{T}\right)\cdot\left[w_{0}\,z_{1}-w_{1}\,z_{0}\right]<0$

und $P^T \cdot [w_0 z_1 - w_1 z_0] < 0$ sowie $P^T \cdot [w_1 z_0 - w_0 z_1] \leq \mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot [w_1 z_0 - w_0 z_1]$. Unterstellt man $w_0 > 0$, so ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot \left[z_1 - \frac{w_1}{w_0} z_0\right] &< 0 \\
P^T \cdot \left[z_1 - \frac{w_1}{w_0} z_0\right] &< 0 \\
\mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot \left[z_1 - \frac{w_1}{w_0} z_0\right] &\leq P^T \cdot \left[z_1 - \frac{w_1}{w_0} z_0\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot z_1}{\mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot z_0} &< \frac{w_1}{w_0} \\
\frac{P^T \cdot z_1}{P^T \cdot z_0} &< \frac{w_1}{w_0} \\
\frac{\left(\mathrm{E}\left(Z^T\right) - P^T\right) \cdot z_1}{\left(\mathrm{E}\left(Z^T\right) - P^T\right) \cdot z_0} &\leq \frac{w_1}{w_0}
\end{aligned}$$

3. Der Übergang von der linken Alternative (Kassenhaltung aktiv) zur rechten Alternative (Kassenhaltung inaktiv) geschieht am **Berührungspunkt** der beiden Hyperflächen, dort wo die beiden Gradienten proportional sind:

$$\begin{aligned}
w_0 - w_1 &= \alpha \cdot \mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot [w_0 z_1 - w_1 z_0] \\
w_1 - w_0 &= \alpha \cdot \left[P^T \cdot [w_1 z_0 - w_0 z_1]\right]
\end{aligned}$$

d.h. wenn

$$\mathrm{E}\left(Z^T\right) \cdot \left[z_1 - \frac{w_1}{w_0} z_0\right] = P^T \cdot \left[z_1 - \frac{w_1}{w_0} z_0\right]$$

$$\text{d.h.} \qquad \frac{\left(\mathrm{E}\left(Z^T\right) - P^T\right) \cdot z_1}{\left(\mathrm{E}\left(Z^T\right) - P^T\right) \cdot z_0} = \frac{w_1}{w_0}$$

gilt. Im Berührungspunkt stimmt das Verhältnis der Risikoprämien der beiden Separationsfonds bezüglich der Kassenrendite mit dem Verhältnis von erwartetem Payoff zu Budget der Gesamtposition überein.

5 Zwei Beispiele

5.1 Der allgemeine zustandsdiskrete Fall

Es ist zweckmäßig, Zufallsvariablen gedanklich als Zeilenvektoren aufzufassen, in denen die Realisationen zustandsbezogen erfasst sind. Wir betrachten einen Markt mit vier Zuständen und fünf Wertpapieren; die Payoffs sind in der folgenden Matrix zusammen gefasst

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{352}{5} & \frac{402}{5} & \frac{512}{5} & \frac{472}{5} \\ \frac{288}{5} & \frac{358}{5} & \frac{458}{5} & \frac{438}{5} \\ 90 & 110 & 120 & 130 \\ 100 & 100 & 120 & 110 \\ 110 & 120 & 140 & 130 \end{pmatrix}$$

die Wahrscheinlichkeiten seien

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

die Preise

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2546}{31} \\ \frac{2191}{31} \\ 100 \\ 105 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Die drei letzten Wertpapiere sind stochastisch linear unabhängig und als Basiswertpapiere ausgewählt; die Matrix A aus der die Payoffs aller Wertpapiere reproduziert werden können, errechnet sich zu

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei linear unabhängige Hedge–Portfolios

$$Hedge = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

die aus dem Kauf jeweils eines Nicht–Basiswertpapiers und dem Verkauf eines geeigneten Portfolios von Basiswertpapieren bestehen. Das erste Hedge–Portfolio hat den Payoff

$$\begin{pmatrix} -\frac{322}{5} & -\frac{322}{5} & -\frac{322}{5} & -\frac{322}{5} \end{pmatrix}$$

bei einem Preis in Höhe von $-1932/31$, sodass sich die risikofreie Rendite in Höhe von

$$r_f = \frac{322 \cdot 31}{1932 \cdot 5} - 1 = \frac{31}{30} - 1 = \frac{1}{30}$$

ergibt. Entsprechend findet man für das zweite Hedge–Portfolio den Payoff

$$\begin{pmatrix} -\frac{268}{5} & -\frac{268}{5} & -\frac{268}{5} & -\frac{268}{5} \end{pmatrix}$$

und den Preis $-1608/31$, sodass sich die Rendite hier ebenfalls in Höhe von

$$r_f = \frac{268 \cdot 31}{1608 \cdot 5} - 1 = \frac{31}{30} - 1 = \frac{1}{30}$$

ergibt.

Es gibt auch ein Arbitrageportfolio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{134}{161} \\ \frac{107}{805} \\ -\frac{188}{805} \\ -\frac{81}{805} \end{pmatrix}$$

Die volle Kovarianzmatrix (der Basis– wie der Nicht–Basiswertpapiere) sieht wie folgt aus

$$C = \begin{pmatrix} 160.64 & 168.16 & 145.6 & 108.0 & 147.2 \\ 168.16 & 179.84 & 166.4 & 108.0 & 152.8 \\ 145.6 & 166.4 & 184.0 & 80.0 & 128.0 \\ 108.0 & 108.0 & 80.0 & 80.0 & 100.0 \\ 147.2 & 152.8 & 128.0 & 100.0 & 136.0 \end{pmatrix}$$

Sie ist singulär; die Kovarianzmatrix der Basiswertpapiere ist die rechte untere (3×3)–Teilmatrix, sie ist nicht–singulär, ihre Determinante beträgt 28800. Die Separationsfonds lauten

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.722 \\ 4.167 \\ -2.816 \end{pmatrix} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.861 \\ 4.333 \\ -3.056 \end{pmatrix}$$

mit den Daten

$$\begin{aligned} z_0^T P &= 166.389 & z_1^T P &= 174.44 \\ z_0^T \mathrm{E}\left(Z\right) &= 174.44 & z_1^T \mathrm{E}\left(Z\right) &= 183.722 \\ z_0^T C\, z_0 &= 166.389 & z_1^T C\, z_1 &= 183.722 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Fundamentalmatrix zu:

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 166.389 & 174.44 \\ 174.44 & 183.722 \end{pmatrix}$$

Die drei Varianten des effizienten Randes lauten:

1. Effizienter Rand auf Grundlage der Basiswertpapiere

$$\sigma^2\left(w_0, w_1\right) = 1.327 \cdot w_0^2 - 2.52 \cdot w_0 w_1 + 1.202 \cdot w_1^2$$

2. Effizienter Rand auf Grundlage der Hedge–Portfolios

$$\sigma^2\left(w_0, w_1\right) = \frac{\left(w_1 - \left(1 + r_f\right) w_0\right)^2}{0.87}$$

3. Effizienter Rand im Bereich aktiver Kassenhaltung

$$\sigma^2 (w_0, w_1) = \frac{(w_1 - w_0)^2}{1.222}$$

Abbildung (1) zeigt in einer graphischen Darstellung bei gegebenem w_0 den effizienten Rand auf der Grundlage der Basiswertpapiere als Funktion der Standardabweichung der gesamtposition in Abhängigkeit vom Erwartungswert des Payoffs der Gesamtposition; das varianzminimale Portfolio ist besonders gekennzeichnet.

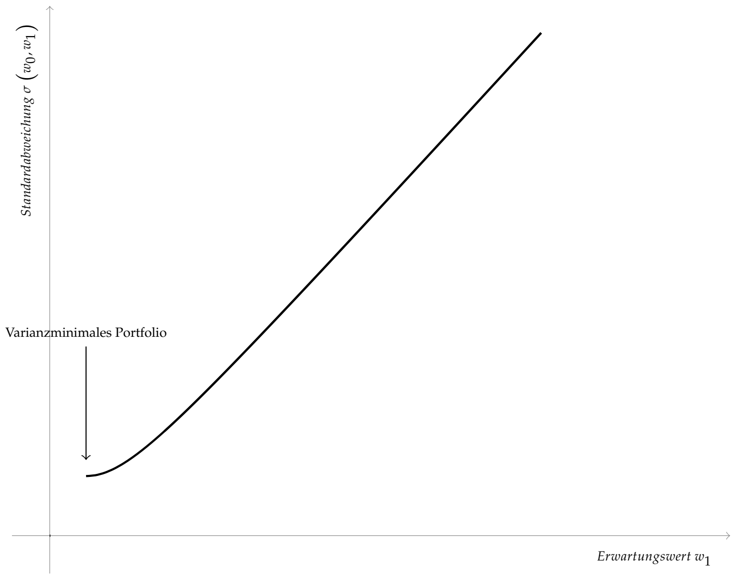

Abbildung 1: Effizienter Rand der Basiswertpapiere

Abbildung (2) zeigt den Verlauf des effizienten Randes, wenn man zudätzlich zu den Basiswertpapieren die Kassenpositionen mit berücksichtigt: Hier ist eine risikofreie Gesamtposition (vollständig in Kasse „investiert”) möglich; ist man bereit, Risiko einzugehen, kombiniert man zunächst Kasse mit einem Portfolio, das durch die oben geschilderte Tangentialbedingung gegeben ist, bis man vollständig in diesem Portfolio investiert ist. Ist man zur Übernahme weiteren Risikos bereit, wird man auf den effizienten Rand der Basiswertpapiere verwiesen. Sehr deutlich wird, dass das varianzminimale Portfolio in jedem Fall dominiert wird.

Abbildung (3) zeigt den klassischen Fall der TOBIN–Separation, allerdings unter Verwendung von Hedge–Portfolios ohne explizite risikofreie Anlage. Hier wird noch deutlicher als im Kassenhaltungsfall, dass das varianzminimale Portfolio ineffizient ist.

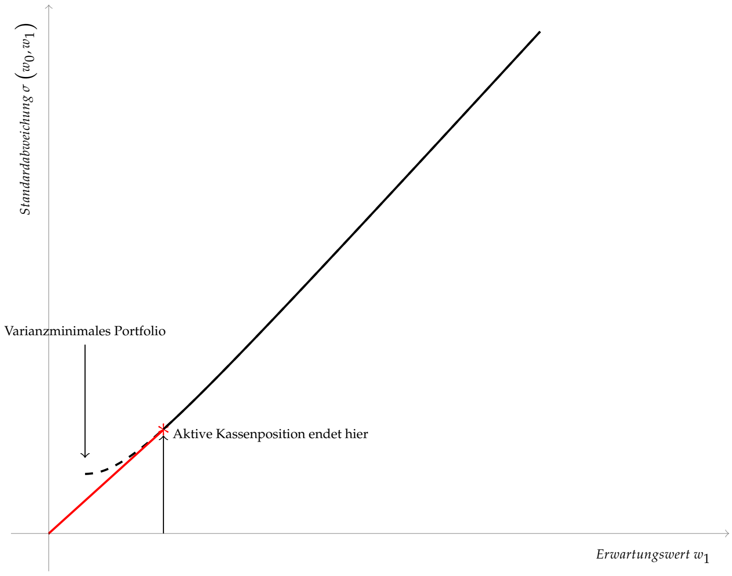

Abbildung 2: Effizienter Rand mit aktiver Kassenhaltung

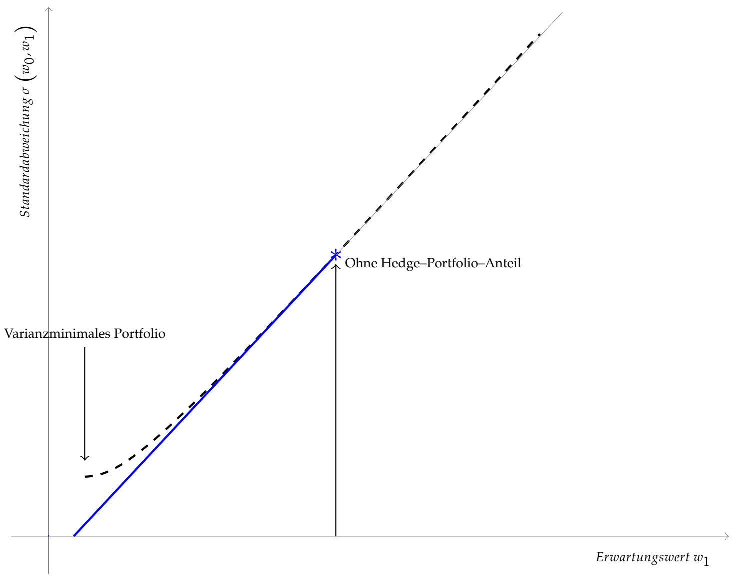

Abbildung 3: Effizienter Rand mit Hedge–Portfolios

5.2 Der Binomialfall

Der Binomialfall, in dem nur zwei Zustände zu Grunde gelegt werden, wird gewöhnlich nicht im hier untersuchten Zusammenhang betrachtet, vielmehr gilt er als der einfachste Zugang zur Optionspreistheorie (vgl. COX ET AL. (1979)) und ihren Verzweigungen. Es erweist sich indessen als durchaus interessant, das Effizienzkonzept in diesem Bezugsrahmen zu diskutieren. Wir legen folgenden Markt vor: Die Payoffs von drei Wertpapieren

$$Z = \begin{pmatrix} 95 & 107\frac{1}{2} \\ 103 & 95\frac{1}{2} \\ 100 & 110 \end{pmatrix}$$

die Wahrscheinlichkeiten

$$p = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

und die Preise

$$P = \begin{pmatrix} 93\frac{17}{26} \\ 97\frac{17}{26} \\ 98 \end{pmatrix}$$

Das letzte Wertpapier wird als Basiswertpapier ausgewählt, dann ergibt sich der Zusammenhang

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auch in diesem Fall kann man zwei linear unabhängige Hedge–Portfolios zu

$$Hedge = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Rendite $r_f = \frac{1}{25}$ bestimmen. Es gibt ein Arbitrageportfolio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{15}{89} \\ -\frac{100}{89} \end{pmatrix}$$

das die Bewertung des ersten Wertpapiers unter Verwendung der Preise des zweiten und dritten Wertpapiers erlaubt.

Die volle Kovarianzmatrix lautet

$$C = \begin{pmatrix} 37.5 & -22.5 & 30 \\ -22.5 & 13.5 & -18 \\ 30 & -18 & 24 \end{pmatrix}$$

und ist wieder singulär. Die „Kovarianzmatrix" des Basiswertpapiers besteht aus dessen Varianz, dem rechten unteren Feld der vollen Kovarianzmatrix.

Die Separationsfonds lauten

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.083 \end{pmatrix} \quad z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.333 \end{pmatrix}$$

Sie sind natürlich proportional, daher strukturgleich und mithin vollstängig positiv korreliert. Die Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 400.167 & 424.667 \\ 424.667 & 450.667 \end{pmatrix}$$

ist folglich singulär: Der effiziente Rand der „Basiswertpapiere" kann hier nicht durch Matrixinversion bestimmt werden. Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

muss nach $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ aufgelöst, das Ergebnis in

$$s = \lambda_1 w_1 - \lambda_0 w_0$$

eingesetzt werden. Da die Determinante von $\boldsymbol{B}$ gleich null ist, gilt

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & \frac{B_{12}^2}{B_{11}} \end{pmatrix}$$

Eine Lösung existiert nur, wenn $w_1 = \frac{B_{12}}{B_{11}} w_0$ gilt. Eine partikuläre Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B_{11}}{B_{12}^2} w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{w_0}{B_{12}} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{B_{11}}{B_{12}} \end{pmatrix}$ spannt den Nullraum von $\boldsymbol{B}$ auf, sodass die Lösungsgesamtheit mit $(v \in \mathbb{R})$ durch

$$\begin{pmatrix} v \\ \frac{w_0}{B_{12}} + v\frac{B_{11}}{B_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{w_0 + vB_{11}}{B_{12}} \end{pmatrix}$$

gegeben ist; der effiziente Rand auf Basis des Basiswertpapiers ist mithin durch

$$\begin{aligned} s &= \frac{w_0^2}{B_{11}}; w_1 = \frac{B_{12}}{B_{11}} w_0 \\ &\text{bzw.} \\ s &= \frac{w_1^2}{B_{12}^2}; w_0 = \frac{B_{11}}{B_{12}} w_1 \end{aligned}$$

gegeben, er schrumpft zu einer Kurve im (s, w_1, w_0)–System. Numerische Auswertung ergibt:

$$\begin{aligned} s &= \frac{w_0^2}{400.167}; w_1 = 1.061 \cdot w_0 \\ s &= \frac{w_0^2}{450.476}; w_0 = 0.9425 \cdot w_1 \end{aligned}$$

Abbildungen (4), (5) und (6) verdeutlichen die Verhältnisse im einfachsten aller denkbaren Fälle: dem Binomialfall. Der effiziente Rand „der Basiswertpapiere" schrumpft in dieser Situation zu einem Punkt, der Kombination von Standardabweichung und Erwartungswert des einzigen Basiswertpapiers, und die beiden für die Kassenhaltung und die Hedge–Portfolios charakteristischen „Tangentialpunkte" fallen zusammen.

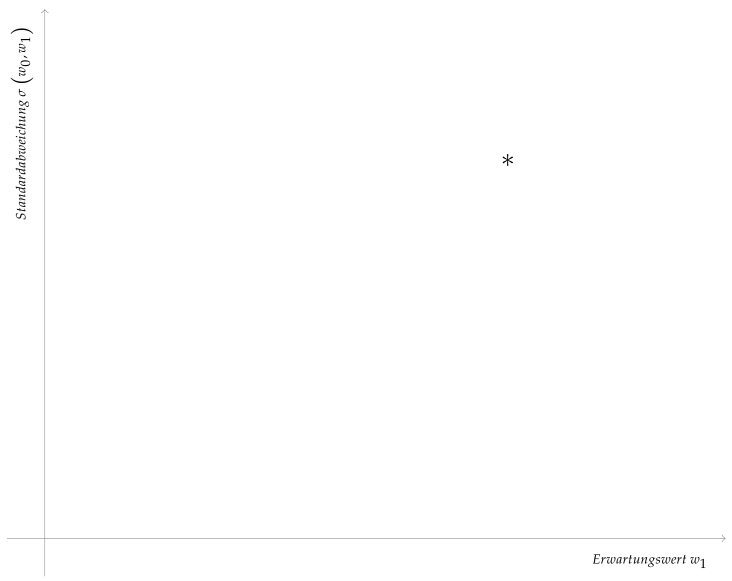

Abbildung 4: Effizienter „Rand“ des Basiswertpapiers im Binomialfall

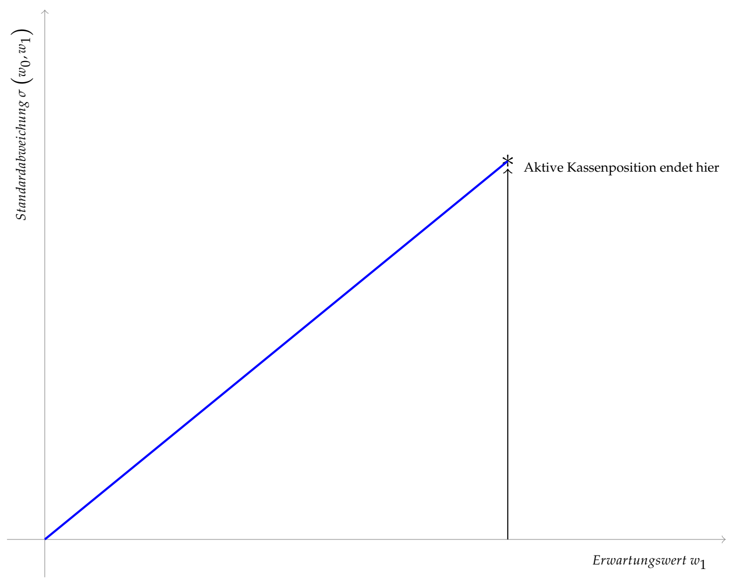

Abbildung 5: Effizienter Rand mit aktiver Kassenhaltung im Binomialfall

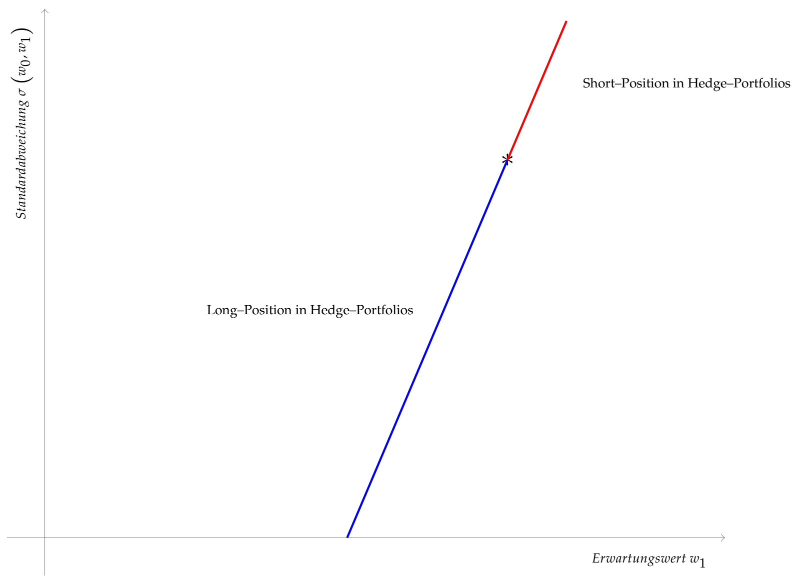

Abbildung 6: Effizienter Rand mit Hedge–Portfolios im Binomialfall

6 Zusammenfassung

1. Es erweist sich als fruchtbar, das (μ, σ)–Prinzip der Portfolio–Theorie in ein allgemeineres Effizienzkonzept, die (μ, σ, w_0)–Effizienz einzubetten.
2. Es ist möglich und sinnvoll, die Kassenhaltung als denkbare Handlungsmöglichkeit in das Portfolio–Problem einzubeziehen.
3. Verzichtet man bei der Formulierung von Portfolio–Problemen auf die Standardannahme einer risikofreien Anlageform, ergeben sich Hedge– und Arbitrageportfolios als natürliche Konzepte, wodurch sich eine brücke zur arbitragefreien Bewertung von Derivaten schlagen lässt.
4. Es lassen sich enge Verbindungen zwischen der Existenz effizienter Gesamtpositionen und der Gültigkeit des „Law of One Price" sowie der nicht–risikoneutralen Bewertung durch den Kapitalmarkt feststellen.
5. Die Bedeutung des varianzminimalen Portfolios ist bei der Gestaltung von effizienten Gesamtpositionen eine andere als die Literatur nahe legt.

A Anhang

A.1 Das Maximumprinzip der Effizienz

Das Maximumprinzip der Effizienz erlaubt es, die Effizienz eines Ergebnisses durch die Lösung einer Reihe von Optimierungsaufgaben zu charakterisieren.

Maximumprinzip der Effizienz Eine Alternative a^* in einem Vektormaximumproblem mit den Zielfunktionen z_i $(i = 1, ..., n)$ ist genau dann effizient, wenn für jede Zielfunktion z_i $(i = 1, ..., n)$ gilt:

$$z_i(a^*) = \max\{z_i(a) \,|\, a \in A \text{ und } z_j(a) \geq z_j(a^*) \;\text{ für alle } j \neq i\} \tag{A1}$$

Beweis: $(\Rightarrow)$ durch Kontraposition: angenommen (A1) wäre falsch, dann gibt es eine Alternative $\bar{a} \in A$ mit $z_i(\bar{a}) > z_i(a^*)$ und $z_j(\bar{a}) \geq z_j(a^*)$ für alle $j \neq i$. Folglich gilt $z(\bar{a}) \geq z(a^*)$ und $z(\bar{a}) \neq z(a^*)$ im Widerspruch zur Effizienz von a^*.

$(\Leftarrow)$: Erfülle a^* die Bedingung (A1) für alle i = 1,....,n; sei $\bar{a} \in A$ mit $z(\bar{a}) \geq z(a^*)$ gegeben. Man prüfe $\max\{z_i(a)|a \in A \text{ und } z_j(a) \geq z_j(a^*) \;\text{ für alle } j \neq i\}$. Die Menge, über der maximiert wird, enthält $\bar{a}$, denn es gilt nach Voraussetzung $z(\bar{a}) \geq z(a^*)$.Wegen (A1) ist daher $z_i(\bar{a}) \leq z_i(a^*)$ und daher $z_i(\bar{a}) = z_i(a^*)$. Da (A1) für alle $i = 1, ..., n$ gelten muss, ist $z(\bar{a}) = z(a^*)$, d.h. a^* ist effizient. q.e.d.

A.2 KUHN-TUCKER-Bedingungen

Es sei die allgemeine Optimierungsaufgabe gestellt (vgl. FRANKLIN (1980))

$$\begin{aligned} f(x,y) &\longrightarrow \max! \\ g(x,y) &\leq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

wobei $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m_+$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt. Sei $(\bar{x}, \bar{y})$ ein Maximand dieses Problems, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^k_+$ mit

$$\begin{aligned} \nabla_x f(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^T \Delta_x g(\bar{x},\bar{y}) &= 0 \\ \nabla_y f(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^T \Delta_y g(\bar{x},\bar{y}) &\leq 0 \\ \left(\nabla_y f(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^T \Delta_y g(\bar{x},\bar{y})\right) \cdot \lambda &= 0 \end{aligned}$$

dabei ist ∇_x der **Gradient** einer skalarwertigen Funktion in Bezug auf die Variablengruppe x und Δ_x die (zeilenweise) aus den Gradienten der Komponenten einer vektorwertigen Funktion bestehende **Funktionalmatrix** (wiederum bezogen auf die Variablengruppe x).

Literatur

Brito, N. O. (**1977**). Marketability Restrictions and the Valuation of Capital Assets Under Uncertainty. *Journal of Finance* 32: S. 1109–1123.

Copeland, T. E., Weston, J. F. und Shastri, K. (**2007**). *Financial Theory and Corporate Policy*. Pearson/Addison–Wesley, Boston/Mass. et al., 4., internationale Auflage.

Cox, J. C., Ross, S. A. und Rubinstein, M. E. (**1979**). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics* 7: S. 229–264.

Franklin, J. (**1980**). *Methods of Mathematical Economics — Linear and Nonlinear Programming, Fixed–Point Theorems*. Springer Verlag, Berlin et al.

Ingersoll, Jr., J. E. (**1987**). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield, Totowa/New Jersey.

Jevons, W. S. (**1888**). *The Theory of Political Economy*. Macmillan and Co., London and New York, 3 Auflage.

Markowitz, H. M. (**1952**). Portfolio Selection. *Journal of Finance* 7: S. 77–91.

Markowitz, H. M. (**1959**). Portfolio Selection — Efficient Diversification of Investment, 4. Nachdruck 1976. *New Haven et al.* .

Mayers, D. (**1972**). Non–Marketable Assets and Capital Market Equilibrium Under Uncertainty. In: M. C. Jensen (Hrsg.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, S. 223–248. Praeger, New York.

Merton, R. C. (**1973**). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica* 41: S. 867–887.

Richter, H. (**1966**). *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Verlag, Berlin et al., 2. Auflage.

Roll, R. (**1977**). A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Part I: On Past and Potential Testability of the Theory. *Journal of Financial Economics* 4: S. 129–176.

Rudolph, B. (**1979**). Zur Theorie des Kapitalmarktes. Grundlagen, Erweiterungen und Anwendungsbereiche des "Capital Asset Pricing Model (CAPM)". *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 49: S. 1034–1067.

Rudolph, B. (**1982**). Portefeuille- und Aktienkursbildung bei monopolistischem Anlegerwettbewerb. *Zeitschrift fr Betriebswirtschaft* 52: S. 471–490.

Rudolph, B. (**2006**). *Unternehmensfinanzierung und Kapitalmarkt*. Neue ökonomische Grundrisse. Mohr Siebeck, Tübingen.

Schäfer, K., Burghof, H.-P., Johanning, L., Wagner, H. F. und Rodt, S. (Hrsg.) (**2009**). *Risikomanagement und kapitalmarktorientierte Finanzierung – Festschrift zum 65. Geburtstag von Bernd Rudolph*. Fritz Knapp Verlag, Frankfurt am Main.

Tobin, J. (**1957**). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *Review of Financial Studies* 25: S. 65–86.

Trautmann, S. (**2007**). *Investitionen*. Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 2., verbesserte Auflage.

Wilhelm, J. und Garhammer, J. (**2009**). Portfolio Selektion: Die (analytische) Geometrie des effizienten Randes. In: SCHÄFER ET AL. (2009), S. 807–830.