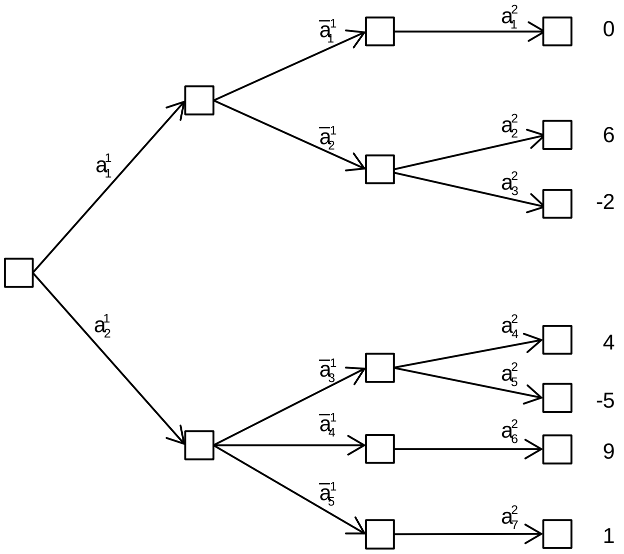
# Lösungsskizzen zu Kapitel 3.3.5

**Aufgabe 3.3-1**

**Lösung:**




a) Die Strategien des Spielers 1 lauten:

$b_1 : a_1^1\left(\bar{a}_2^1\right) a_2^2$

$b_2 : a_1^1\left(\bar{a}_2^1\right) a_3^2$

$b_3 : a_2^1\left(\bar{a}_3^1\right) a_4^2$

$b_4 : a_2^1\left(\bar{a}_3^1\right) a_5^2$

Die Strategien des Spielers 2 lauten:

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{b}_1 : \left(a_1^1\right) \bar{a}_1^1$ <br> $\left(a_2^1\right) \bar{a}_3^1$ | $\bar{b}_2 : \left(a_1^1\right) \bar{a}_1^1$ <br> $\left(a_2^1\right) \bar{a}_4^1$ | $\bar{b}_3 : \left(a_1^1\right) \bar{a}_1^1$ <br> $\left(a_2^1\right) \bar{a}_5^1$ |
| $\bar{b}_4 : \left(a_1^1\right) \bar{a}_2^1$ <br> $\left(a_2^1\right) \bar{a}_3^1$ | $\bar{b}_5 : \left(a_1^1\right) \bar{a}_2^1$ <br> $\left(a_2^1\right) \bar{a}_4^1$ | $\bar{b}_6 : \left(a_1^1\right) \bar{a}_2^1$ <br> $\left(a_2^1\right) \bar{a}_5^1$ |

Für die Spielmatrix gilt unter der Annahme der Beziehung $w_{ij} = e_{ij}$:

| | $\bar{b}_1$ | $\bar{b}_2$ | $\bar{b}_3$ | $\bar{b}_4$ | $\bar{b}_5$ | $\bar{b}_6$ | Min | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 6 | 0 | |
| $b_2$ | 0 | 0 | 0 | -2 | -2 | -2 | -2 | |
| $b_3$ | 4 | 9 | 1 | 4 | 9 | 1 | 1 | $\Leftarrow$ max |
| $b_4$ | -5 | 9 | 1 | -5 | 9 | 1 | -5 | |
| Max | 4 | 9 | 1 | 6 | 9 | 6 | | |
| | | | $\Uparrow$ | | | | | |
| | | | min | | | | | |

b) Die Maximin-Strategie des Spielers 1 ist die Strategie $b_3$.
Die Maximin-Strategie des Spielers 2 ist die Strategie $\bar{b}_3$.
Der untere Spielwert beträgt $y^{S1}(b_3) = y^{S1}(b^*) = 1$.
Der obere Spielwert beträgt $y^{S2}(\bar{b}_3) = y^{S2}(\bar{b}^*) = 1$.
Damit ist das Spiel determiniert mit dem Spielwert $y^{SP} = 1$.
Die Strategiekombination $(b_3, \bar{b}_3)$ stellt einen Gleichgewichtspunkt des Spiels dar.

**Aufgabe 3.3-2**

**Lösung:**

a) Jeder der beiden Konzerne kann ein Normalprogramm (Y) und je ein Sofortprogramm durchführen, das entweder in der Stadt 1 ($S_1$) oder in der Stadt 2 ($S_2$) beginnt, d. h. jeder der Konzerne besitzt 3 Strategien mit :

| | | |
|---|---|---|
| $b_1: \text{NA}$ | | $\bar{b}_1: \text{NB}$ |
| $b_2: \text{S1A}$ | bzw. | $\bar{b}_2: \text{S1B}$ |
| $b_3: \text{S2A}$ | | $\bar{b}_3: \text{S2B}$ |

Für die Ergebnisse gilt aus der Sicht des Konzerns A:

| Strategie- | Stadt 1 | | | | Stadt 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kombination | Monate A | Monate B | Differenz | % | Monate A | Monate B | Differenz | % | $\sum$ % |
| $b_1 - \bar{b}_1$ | 12 | 12 | 0 | +5 | 12 | 12 | 0 | +5 | +10 |
| $b_1 - \bar{b}_2$ | 12 | 9 | -3 | -11 | 12 | 18 | +6 | +35 | +24 |
| $b_1 - \bar{b}_3$ | 12 | 18 | +6 | +35 | 12 | 9 | -3 | -11 | +24 |
| $b_2 - \bar{b}_1$ | 10 | 12 | +2 | +15 | 19 | 12 | -7 | -13 | +2 |
| $b_2 - \bar{b}_2$ | 10 | 9 | -1 | -5 | 19 | 18 | -1 | -5 | -10 |
| $b_2 - \bar{b}_3$ | 10 | 18 | +8 | +45 | 19 | 9 | -10 | -15 | +30 |
| $b_3 - \bar{b}_1$ | 19 | 12 | -7 | -13 | 10 | 12 | +2 | +15 | +2 |
| $b_2 - \bar{b}_2$ | 19 | 9 | -10 | -15 | 10 | 18 | +8 | +45 | +30 |
| $b_2 - \bar{b}_3$ | 19 | 18 | -1 | -5 | 10 | 9 | -1 | -5 | -10 |

Unter der Annahme, dass die Marktanteile unmittelbar Nutzenziffern darstellen, lässt sich folgende Spielmatrix aufstellen:

| | $\bar{b}_1$ | $\bar{b}_2$ | $\bar{b}_3$ | Min | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 10 | 24 | 24 | 10 | $\Leftarrow$ max |
| $b_2$ | 2 | -10 | 30 | -10 | |
| $b_3$ | 2 | 30 | -10 | -10 | |
| Max | 10 | 30 | 30 | | |
| | $\Uparrow$ min | | | | |

b) Die Maximin-Strategie des Spielers 1 ist die Strategie $b_1$.
Die Maximin-Strategie des Spielers 2 ist die Strategie $\bar{b}_1$.
Der untere Spielwert beträgt $y^{S1}(b_1) = y^{S1}(b^*) = 10$.
Der obere Spielwert beträgt $y^{S2}(\bar{b}_1) = y^{S2}(\bar{b}^*) = 10$.
Damit ist das Spiel determiniert mit dem Spielwert $y^{SP} = 10$.
Die Strategiekombination $(b_1, \bar{b}_1)$ stellt einen Gleichgewichtspunkt des Spiels dar.

**Aufgabe 3.3-3**

**Lösung:**

Für das in der Spielmatrix

| | $\bar{b}_1$ | $\bar{b}_2$ | $\bar{b}_3$ | Min | |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_1$ | 12 | 19 | 20 | 12 | $\Leftarrow$ max |
| $b_2$ | 15 | 2 | 5 | 2 | |
| $b_3$ | 10 | 16 | 20 | 10 | |
| Max | 15 | 19 | 20 | | |
| | $\Uparrow$ min | | | | |

beschriebene Spiel gilt:

$y^{S1}(b_1) = y^{S1}(b^*) = 12 < y^{S2}(\bar{b}_1) = y^{S2}(\bar{b}^*) = 15$, d. h. das Spiel ist indeterminiert, es existiert kein Gleichgewichtspunkt.

Die Strategie $b_3$ wird von der Strategie $b_1$ dominiert.

In der reduzierten Spielmatrix

| | $\bar{b}_1$ | $\bar{b}_2$ | $\bar{b}_3$ |
|---|---|---|---|
| $b_1$ | 12 | 19 | 20 |
| $b_2$ | 15 | 2 | 5 |

dominiert die Strategie $\bar{b}_2$ die Strategie $\bar{b}_3$.

Die schließlich verbleibende Spielmatrix

| | $\bar{b}_1$ | $\bar{b}_2$ |
|---|---|---|
| $b_1$ | 12 | 19 |
| $b_2$ | 15 | 2 |

kann nicht weiter reduziert werden.

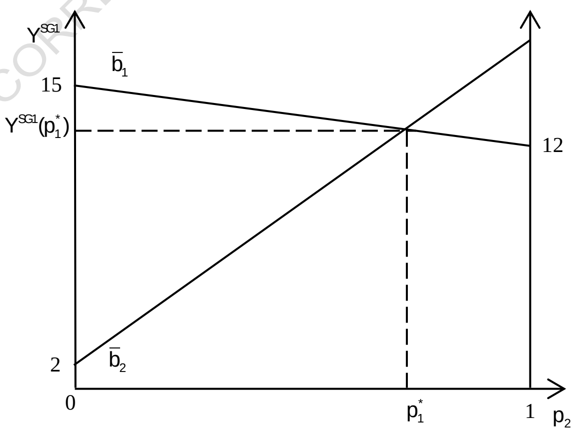
Es gilt:

$$Y^{SG1}(p_1) = 12p_1 + 15(1 - p_1)$$

und

$$Y^{SG1}(p_1) = 19p_1 + 2(1 - p_1)$$

Die graphische Darstellung der beiden Geradengleichungen zeigt folgendes Bild:



Die analytische Ermittlung des Schnittpunktes der beiden Geraden ergibt:

$$12p_1^* + 15\left(1 - p_1^*\right) = 19\,p_1^* + 2\left(1 - p_1^*\right)$$

$$-3p_1^* + 15 = 17p_1^* + 2$$

$$-20p_1^* = -13$$

$$p_1^* = \frac{13}{20} = 0,65$$

$$Y^{SG1} = 12 \cdot 0,65 + 15(1 - 0,65) = 12 \cdot 0,65 + 15 \cdot 0,35 = 13,05$$

Damit ist $\left\{\left(0,65; 0,35\right)\right\}$ die Menge aller optimal gemischten Strategien des Spielers 1 im reduzierten Spiel.

Nach 3.3-7 gilt:

$$12\overline{p}_1^* + 19\left(1 - \overline{p}_1^*\right) \leq 13,05$$

$$-7\overline{p}_1^* + 19 \leq 13,05$$

$$-7\overline{p}_1^* \leq -5,95$$

$$\overline{p}_1^* \geq 0,85$$

$$15\overline{p}_1^* + 2\left(1 - \overline{p}_1^*\right) \leq 13,05$$

$$13\overline{p}_1^* + 2 \leq 13,05$$

$$13\overline{p}_1^* \leq 11,05$$

$$\overline{p}_1^* \leq 0,85$$

D.h. die beiden Ungleichungen sind nur für $\overline{p}_1^* = 0,85$ gleichzeitig erfüllt. Somit ist $\overline{P}^* = \left\{\left(0,85; 0,15; 0\right)\right\}$ die Menge aller optimalen gemischten Strategien des Spielers 2.

Für die eliminierte Strategie $b_3$ gilt nach 3.3-9:

$$10 \cdot 0,65 + 16 \cdot 0,35 + 20 \cdot 0 = 12,1 < Y^{SG} = 13,05$$

Damit ist $P^* = \left\{\left(0,65; 0,35; 0\right)\right\}$ die Menge aller optimalen gemischten Strategien des Spielers 1 im unreduzierten Spiel.

Der Spieler 1 verhält sich dann optimal, wenn er den Einsatz seiner beiden (reinen) Strategien $b_1$ und $b_2$ vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängig macht, mit $p_1^* = 0,65$ und $p_2^* = 0,35$.

Der Spieler 2 verhält sich dann optimal, wenn er den Einsatz seiner beiden (reinen) Strategien $\overline{b}_1$ und $\overline{b}_2$ vom Ausgang eines Zufallsexperiments abhängig macht, mit $p_1^* = 0,85$ und $p_2^* = 0,15$.

**Aufgabe 3.3-4**

**Lösung:**

Die relevanten Daten für das Reinspiel sind: $p = 0,6;\ x = 3;\ y = 2$

a) Nach 3.3-15 gilt:

$$q_3 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 1} = \frac{0{,}1317 - 0{,}2963}{0{,}1317 - 1} = 0{,}1896$$

$$1 - q_3 = 1 - 0{,}1896 = 0{,}8104$$

Mit der Wahrscheinlichkeit 0,8104 gewinnt der Spieler 1 das Reinspiel.

b) Nach 3.3-23 gilt:

$$D_3 = \frac{3}{1-1{,}2} - \frac{5}{1-1{,}2} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5} = -15 + 25 \cdot \frac{1-0{,}2963}{1-0{,}1317} = 5{,}2609$$

Die erwartete Spieldauer beträgt 5,2609 Zeiteinheiten.

c) Nach 3.3-25 gilt:

$$E_3 = (3+2) \cdot (1-q_3) = 5 \cdot 0{,}8104 = 4{,}0520$$

d) Nach 3.3-26 gilt:

$$E_3^d = (3+2) \cdot (1-q_3) \cdot \frac{1}{(1+0{,}05)^{D_3}}$$

$$E_3^d = 4{,}0520 \cdot \frac{1}{(1{,}05)^{5{,}2609}} = 3{,}1347$$

Da der diskontierte erwartete Spielgewinn höher als der Spieleinsatz ist, ist es für den Spieler 1 sinnvoll, an diesem Spiel teilzunehmen.