Lösungsskizzen zu Kapitel 3.1.4

Aufgabe 3.1-1

Lösung:

a) Lässt man gemäß der Aufgabenstellung die Möglichkeit der Anschaffung einer kleinen und einer großen Maschine außer Betracht, so stehen grundsätzlich folgende Strategien zur Verfügung:

	in der nächsten Periode:	in der Folgezeit:
b_1:	keine zusätzliche Maschine	keine zusätzliche Maschine
b_2:	keine zusätzliche Maschine	zusätzlich kleine Maschine
b_3:	keine zusätzliche Maschine	zusätzlich große Maschine
b_4:	zusätzlich kleine Maschine	keine weitere zusätzliche Maschine
b_5:	zusätzlich kleine Maschine	weitere zusätzliche kleine Maschine
b_6:	große Maschine	keine weitere zusätzliche Maschine

b) Die Umweltzustände lassen sich wie folgt formulieren:

	in der nächsten Periode:	in der Folgezeit:	
s_1' :	Nachfrage steigt (0,6)	Nachfrage steigt weiter (0,8)	(0,48)
s_2' :	Nachfrage steigt (0,6)	Nachfrage steigt nicht weiter (0,2)	(0,12)
s_3' :	Nachfrage steigt nicht (0,4)	Nachfrage steigt (0,3)	(0,12)
s_4' :	Nachfrage steigt nicht (0,4)	Nachfrage steigt nicht (0,7)	(0,28)

c) Unter Berücksichtigung der jeweiligen Kosten wären z.B. folgende Relationen zwischen den Ergebnissen möglich:

	0,48	0,12	0,12	0,28
	s_1'	s_2'	s_3'	s_4'
b_1	20	10	10	5
b_2	30	25	20	-5
b_3	60	45	10	-20
b_4	55	50	15	-10
b_5	80	40	0	-50
b_6	100	48	5	-40

d) $E(b_1) = 13{,}4$ $E(b_2) = 18{,}4$ $E(b_3) = 29{,}8$

$E(b_4) = 31{,}4$ $E(b_5) = 29{,}2$ $E(b_6) = 43{,}16$

Demnach ist es für das Unternehmen am günstigsten, sofort die große Maschine anzuschaffen.

Aufgabe 3.1-2

Lösung:

Rückführung auf das Grundmodell für mehrstufige Entscheidungen:

(1) $\sum_{t=1}^{3} w^{(t)}(e^{(t)}) \to \max$

(2) $s_1^{(t)} = 2\left(s_1^{(t-1)} - a^{(t)}\right)$

(3) $s_1^{(0)} = 700$

(4) $A^{(t)} = \left\{a^{(t)} \middle| 0 \le a^{(t)} \le s_1^{(t-1)}\right\}$

(5) $S^{(t)} = \left\{s_1^{(t)} \middle| 0 \le s_1^{(t)}\right\}$

$s^{(t)}$: Baumbestand am Ende der Periode t

$a^{(t)}$: Verkauf in der Periode t

Allg. Bellmansche Rekursionsberechnung Funktionalgleichung
Rückwärtsrechnung:

$h^{*(4)}(s_1^{(3)}) \equiv 0$

$h^{*(3)}(s_1^{(2)}) = \max_{a^{(3)} \in A^{(3)}(s_1^{(2)})} \left\{\sqrt{a^{(3)}} + 0\right\} = \max_{0 \le a^{(3)} \le s_1^{(2)}} \left\{\sqrt{a^{(3)}}\right\} = \sqrt{s_1^{(2)}}$

$s_1^{(2)} = 2\left(s_1^{(1)} - a^{(2)}\right)$

$h^{*(2)}(s_1^{(1)}) = \max_{a^{(2)} \in A^{(2)}(s_1^{(1)})} \left\{\sqrt{a^{(3)}} + \sqrt{2\left(s_1^{(1)} - a^{(2)}\right)}\right\}$

Nebenrechnung: Unter der Nebenbedingung $0 \le a^{(2)} \le s^{(1)}$!

1. Freies Extremum

$f^{(2)} = \sqrt{a^{(2)}} + \sqrt{2\left(s_1^{(1)} - a^{(2)}\right)} = \left(a^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2\left(s_1^{(1)} - a^{(2)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{df^{(2)}}{da^{(2)}} = \frac{1}{2\sqrt{a^{*(2)}}} - \frac{2}{2\sqrt{2(s_1^{(1)} - a^{*(2)})}} = 0$

$\frac{1}{2}(a^{*(2)})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(2(s_1^{(1)} - a^{*(2)})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2) = 0$

$2\sqrt{a^{*(2)}} = \sqrt{2(s_1^{(1)} - a^{*(2)})}$

$4a^{*(2)} = 2(s_1^{(1)} - a^{*(2)})$

$6a^{*(2)} = 2s_1^{(1)}$

$a^{*(2)} = \frac{s_1^{(1)}}{3}$

$\frac{d^2 f^{(2)}}{d(a^{(2)})^2} = \underbrace{\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{\left(a^{*(2)}\right)^3}}}_{<0} \underbrace{-\frac{2}{\sqrt{2(s_1^{(1)} - a^{*(2)})^3}}}_{<0}}_{<0} < 0$

2. $0 \le \frac{s^{(1)}}{3} \le s^{(1)}$ Nebenbedingung erfüllt!

$$h^{*(2)}(s_1^{(1)}) = \sqrt{\frac{s_1^{(1)}}{3}} + \sqrt{2\left(s_1^{(1)} - \frac{s_1^{(1)}}{3}\right)} = \sqrt{\frac{s_1^{(1)}}{3}} + \sqrt{\frac{4s_1^{(1)}}{3}} = 3\sqrt{\frac{s_1^{(1)}}{3}} = \sqrt{3s_1^{(1)}}$$

$$s_1^{(1)} = 2\left(s_1^{(0)} - a^{(1)}\right)$$

$$h^{*(1)}(s_1^{(0)}) = \max_{a^{(1)} \in A^{(1)}(s_1^{(0)})} \left\{\sqrt{a^{(1)}} + \sqrt{6\left(700 - a^{(1)}\right)}\right\}$$

Nebenrechnung: Unter der Nebenbedingung $0 \le a^{(1)} \le s^{(0)} = 700$

1. Freies Extremum

$$f^{(1)} = \sqrt{a^{(1)}} + \sqrt{6\left(700 - a^{(1)}\right)} = \left(a^{(1)}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(6\left(700 - a^{(1)}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df^{(1)}}{da^{(1)}} = \frac{1}{2\sqrt{a^{*(1)}}} - \frac{6}{2\sqrt{6\left(700 - a^{*(1)}\right)}} = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^{*(1)})^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(6\left(700 - a^{*(1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-6) = 0$$

$$6\sqrt{a^{*(1)}} = \sqrt{6\left(700 - a^{*(1)}\right)}$$

$$36a^{*(1)} = 6\left(700 - a^{*(1)}\right)$$

$$42a^{*(1)} = 4200$$

$$a^{*(1)} = 100$$

$$\frac{d^2f^{(1)}}{d(a^{(1)})^2} = \underbrace{-\underbrace{\frac{1}{4\sqrt{\left(a^{*(1)}\right)^3}}}_{<0} - \underbrace{\frac{9}{\sqrt{(4200 - 6a^{*(1)})^3}}}_{<0}}_{<0} < 0$$

2. $0 \le 100 \le 700$ Nebenbedingung erfüllt!

$$h^{*(1)}(700) = \sqrt{100} + \sqrt{6\left(700 - 100\right)} = 10 + 6 \cdot 10 = 70$$

Vorwärtsrechnung:

$$a^{*(1)} = 100 \Rightarrow s_1^{(1)} = 2\left(s_1^{(0)} - a^{*(1)}\right) = 2\left(700 - 100\right) = 1200$$

$$a^{*(2)} = \frac{s_1^{(1)}}{3} = 400 \Rightarrow s_1^{(2)} = 2\left(1200 - 400\right) = 1600$$

$$a^{*(3)} = s_1^{(2)} = 1600$$

Die optimale Strategie lautet: $b^* = (100, 400, 1600)$, d. h. in der ersten Periode sind $100m^3$ zu verkaufen, in der zweiten Periode $400m^3$ und in der dritten Periode der Rest in Höhe von $1600m^3$.

Aufgabe 3.1-3

Lösung:

a) Es handelt sich um ein Aufteilungsproblem, d.h. um ein Problem das auch „künstlich dynamisiert“ werden kann.

b) $Y^D = \sum_{t=1}^{3} l^{(t)}$

$s_1^{(t)} = s_1^{(t-1)} - a^{(t)}$

$s_1^{(0)} = 3$

$a^{(t)} \in A^{(t)} = \left\{ a^{(t)} \middle| 0 \le a^{(t)} \le s^{(t-1)} \right\}$

$s_1^{(t)} \in S^{(t)} = \left\{ s_1^{(t)} \middle| 0 \le s_1^{(t)} \right\}$

c) Eine mögliche Strategie der Bauunternehmung besteht z. B. darin, auf jeder Baustelle einen Arbeiter einzusetzen. Der Bauunternehmung stehen insgesamt 10 Strategien zur Verfügung, wenn alle Arbeiter auf den Baustellen eingesetzt werden.

d) $h^{*(4)}(s_1^{(3)}) \equiv 0$

$h^{*(3)}(s_1^{(3)}) = \max_{a^{(3)} \in A^{(3)}(s_1^{(2)})} \left\{ l^{(3)} + 0 \right\}$

$$h^{*(3)} = \begin{cases} 0 \text{ für} & s_1^{(2)} = 0 \quad \text{und} \quad a^{(3)} = 0 \\ 10 \text{ für} & s_1^{(2)} = 1 \quad \text{und} \quad a^{(3)} = 1 \\ 12 \text{ für} & s_1^{(2)} = 2 \quad \text{und} \quad a^{(3)} = 2 \\ 26 \text{ für} & s_1^{(2)} = 3 \quad \text{und} \quad a^{(3)} = 3 \end{cases}$$

$h^{*(2)}(s_1^{(1)}) = \max_{a^{(2)} \in A^{(2)}(s_1^{(1)})} \left\{ l^{(2)} + h^{*(3)}(s_1^{(2)}) \right\}$

$s_1^{(2)} = s_1^{(1)} - a^{(2)}$

Für $s_1^{(1)} = 3$ gilt:

$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$l^{(2)}$	$l^{(3)}$	$l^{(2)} + l^{(3)}$	
3	0	25	0	25	
2	1	15	10	25	
1	2	7	12	19	
0	3	0	26	26	$\Leftarrow$ Max

Für $s_1^{(1)} = 2$ gilt:

$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$l^{(2)}$	$l^{(3)}$	$l^{(2)} + l^{(3)}$	
2	0	15	0	15	
1	1	7	10	17	$\Leftarrow$ Max
0	2	0	12	12	

Für $s_1^{(1)} = 1$ gilt:

$a^{(2)}$	$a^{(3)}$	$l^{(2)}$	$l^{(3)}$	$l^{(2)} + l^{(3)}$	
1	0	7	0	7	
0	1	0	10	10	$\Leftarrow$ Max

Zusammengefasst gilt:

$$h^{*(2)}(s_1^{(1)}) = \begin{cases} 0 \text{ für} & s_1^{(1)} = 0 \quad \text{und} \quad a^{(2)} = 0 \\ 10 \text{ für} & s_1^{(1)} = 1 \quad \text{und} \quad a^{(2)} = 0 \\ 17 \text{ für} & s_1^{(1)} = 2 \quad \text{und} \quad a^{(2)} = 1 \\ 26 \text{ für} & s_1^{(1)} = 3 \quad \text{und} \quad a^{(2)} = 0 \end{cases}$$

$$h^{*(1)}(s_1^{(0)}) = \max_{a^{(1)} \in A^{(1)}(s_1^{(0)})} \left\{ l^{(1)} + h^{*(2)}(s_1^{(1)}) \right\}$$

$$s_1^{(1)} = s_1^{(0)} - a^{(1)}$$

$a^{(1)}$	$a^{(2)} + a^{(3)}$	$l^{(1)}$	$l^{(2)} + l^{(3)}$	$l^{(1)} + l^{(2)} + l^{(3)}$	
3	0	26	0	26	
2	1	18	10	28	$\Leftarrow$ Max
1	2	10	17	27	
0	3	0	26	26	

$$a^{*(1)} = 2 \;\Rightarrow\; s_1^{(1)} = s_1^{(0)} - a^{*(1)} = 3 - 2 = 1$$

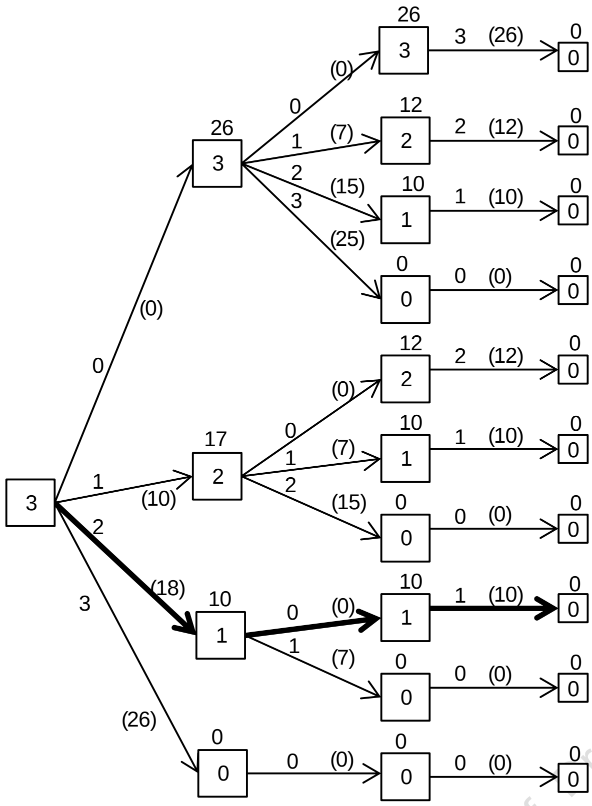
$$a^{*(2)} = 0 \;\Rightarrow\; s_1^{(2)} = s_1^{(1)} - a^{*(2)} = 1 - 0 = 1$$

$$a^{*(3)} = 1 \;\Rightarrow\; s_1^{(3)} = s_1^{(2)} - a^{*(3)} = 1 - 1 = 0$$

Die Bauunternehmung verhält sich dann optimal, wenn sie zwei Arbeiter auf der Baustelle Nr. 1 und einen Arbeiter auf der Baustelle 3 einsetzt.

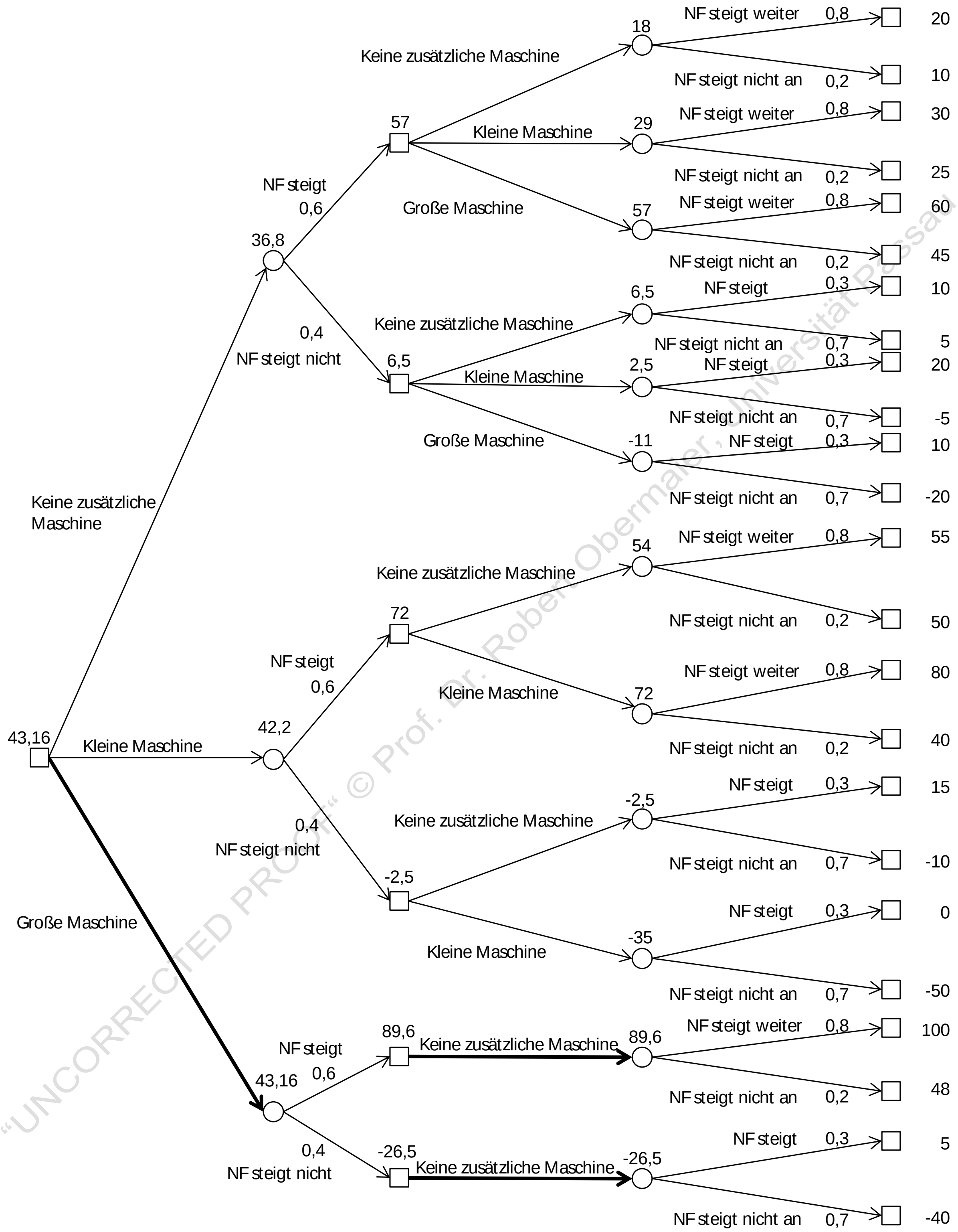
Aufgabe 3.1-4

Lösung:



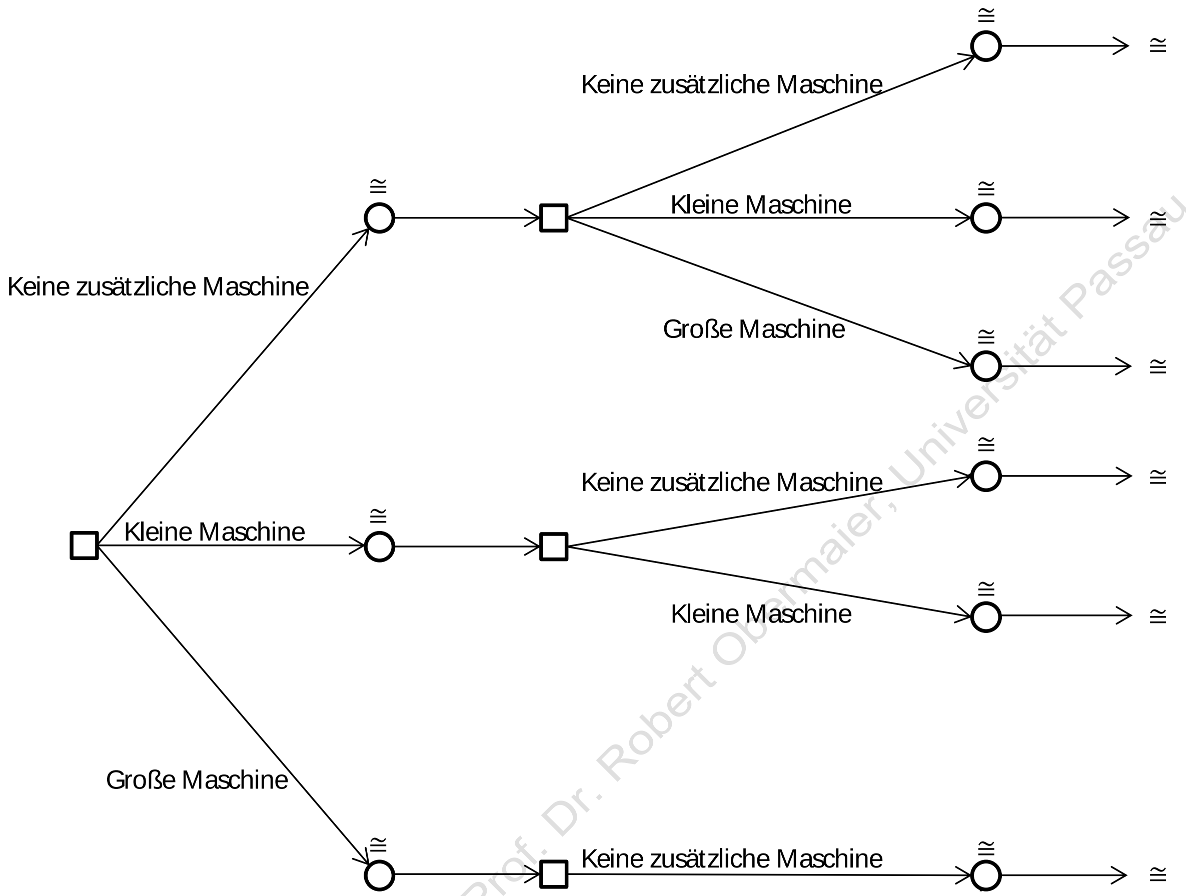
Aufgabe 3.1-5

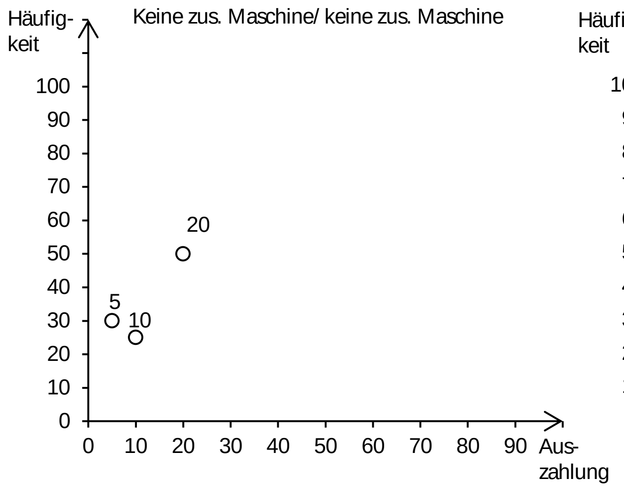
Lösung:

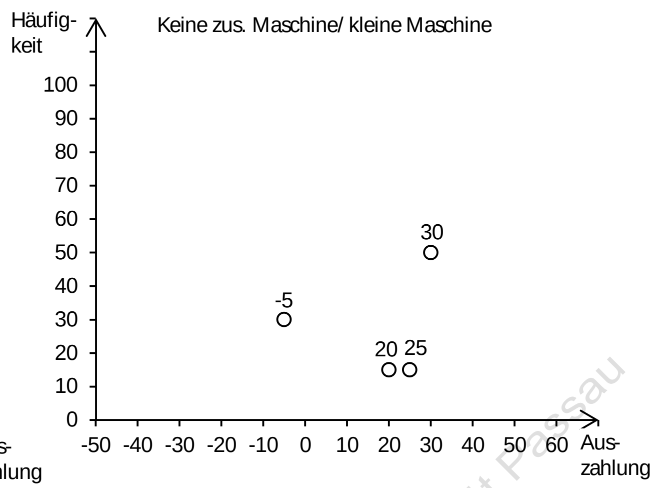


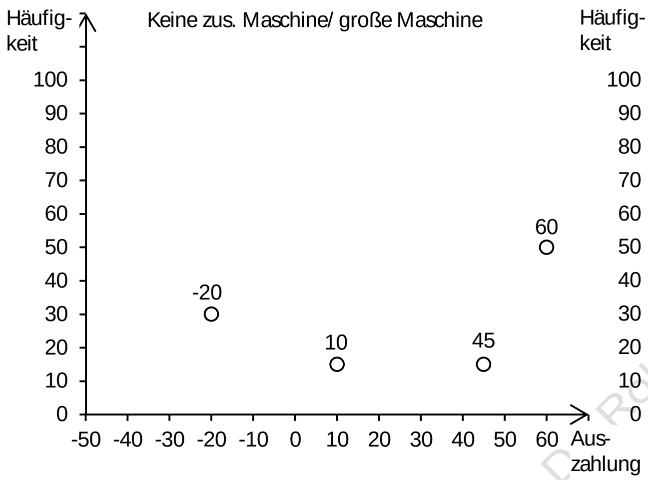
Aufgabe 3.1-6

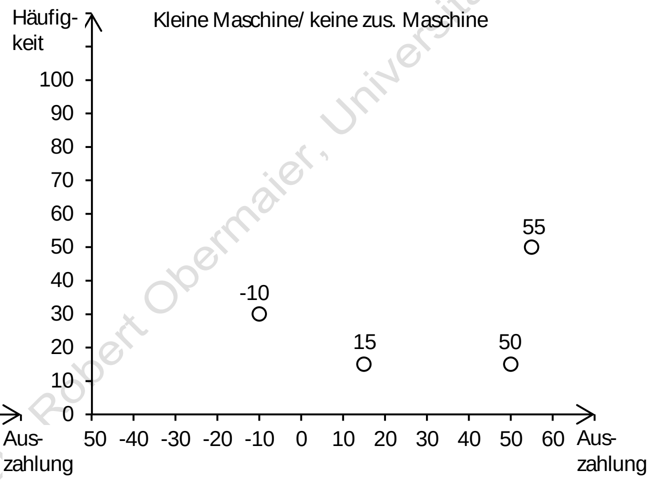
Lösung:

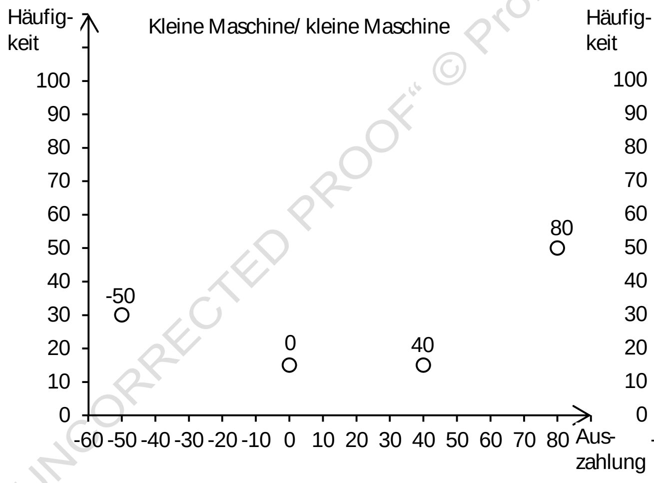


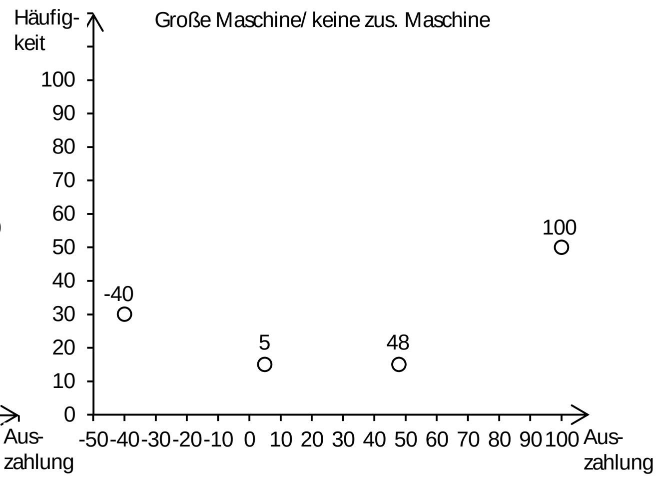

Keine zus. Maschine/ keine zus. Maschine
Häufig-keit
Aus-zahlung
5
10
20


Keine zus. Maschine/ kleine Maschine
Häufig-keit
Aus-zahlung
-5
20 25
30


Keine zus. Maschine/ große Maschine
Häufig-keit
Aus-zahlung
-20
10
45
60


Kleine Maschine/ keine zus. Maschine
Häufig-keit
Aus-zahlung
-10
15
50
55


Kleine Maschine/ kleine Maschine
Häufig-keit
Aus-zahlung
-50
0
40
80


Große Maschine/ keine zus. Maschine
Häufig-keit
Aus-zahlung
-40
5
48
100