Lösungsskizzen zu Kapitel 2.2.5

Aufgabe 2.2-1

Lösung:

a) Subjektive Wahrscheinlichkeit
b) Objektive (statistische) Wahrscheinlichkeit
c) Subjektive Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 2.2-2

Lösung:

Es gilt: $e_1 \succ e_2 \succ e_3 \succ e_4$

Ersetzt man in $L(a_1)$ und $L(a_2)$ nach Axiom 4 die Ergebnisse e_2 und e_3, so erhält man:

$$L(a_1): \begin{array}{c|cccc} e & e_1 & \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}65 & 0{,}35 \end{array} & \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}60 & 0{,}35 \end{array} & e_4 \\ \hline p & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{array}$$

bzw.

$$L(a_2): \begin{array}{c|cccc} e & e_1 & \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}65 & 0{,}35 \end{array} & \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}60 & 0{,}35 \end{array} & e_4 \\ \hline p & 0{,}34 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}26 \end{array}$$

Die Reduktion dieser zusammengesetzten Ergebnisverteilungen nach Axiom 2 führt auf die einfachen Verteilungen:

$$L(a_1): \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}25+0{,}65\cdot 0{,}25+0{,}6\cdot 0{,}25 & 0{,}35\cdot 0{,}25+0{,}40\cdot 0{,}25+0{,}25 \end{array}$$

bzw.

$$L(a_2): \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}34+0{,}65\cdot 0{,}10+0{,}6\cdot 0{,}3 & 0{,}35\cdot 0{,}1+0{,}40\cdot 0{,}3+0{,}26 \end{array}$$

Fasst man die Verteilungen zu:

$$L(a_1): \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}5625 & 0{,}4375 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad L(a_2): \begin{array}{c|cc} e & e_1 & e_4 \\ \hline p & 0{,}585 & 0{,}415 \end{array}$$

zusammen, so gilt nach Axiom 6: $a_2 \succ a_1$

Aufgabe 2.2-3

Lösung:

a)

$\tilde{a}_1$:

e	100	-200	500
p	0,1	0,7	0,2

$E\tilde{a}_1 = -30$

$\tilde{a}_2$:

e	200	0	200
p	0,1	0,7	0,2

$E\tilde{a}_2 = 60$

$\tilde{a}_3$:

e	50	-100	300
p	0,1	0,7	0,2

$E\tilde{a}_3 = -5$

b) $e_1 = 500 \succ e_2 = 300 \succ e_3 = 200 \succ e_4 = 100 \succ e_5 = 50 \succ e_6 = 0 \succ e_7 = -100 \succ e_8 = -200$

$L(a_1)$:

e	500	300	200	100	50	0	-100	-200
p	0,2	0	0	0,1	0	0	0	0,7

$L(a_2)$:

e	500	300	200	100	50	0	-100	-200
p	0	0	0,3	0	0	0,7	0	0

$L(a_3)$:

e	500	300	200	100	50	0	-100	-200
p	0	0,2	0	0	0,1	0	0,7	0

Vorgegeben				Aussage des Entscheiders
e	500	-200		
p	0,2	0,8	~	-50
e	500	-200		
p	0,4	0,6	~	100
e	500	-200		
p	0,6	0,4	~	250
e	500	-200		
p	0,8	0,2	~	400

Schließlich gilt ex definitione:

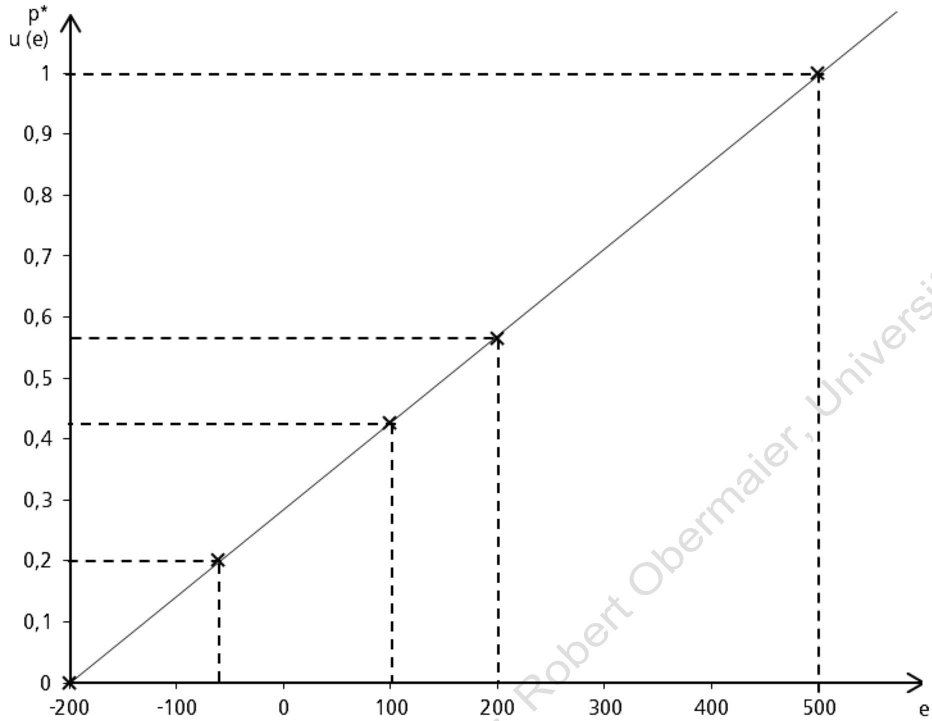
e	500	-200
p	1	0

$\sim$ 500 und

e	500	-200
p	0	1

$\sim$ -200

c)



d) u(500) = 1

u(300) = 0,66

u(200) = 0,53

u(100) = 0,4

u(50) = 0,34

u(0) = 0,26

u(-100) = 0,14

u(-200) = 0

$y_1^B = 0{,}40 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}24$

$y_2^B = 0{,}53 \cdot 0{,}3 + 0{,}26 \cdot 0{,}7 = 0{,}341$

$y_3^B = 0{,}34 \cdot 0{,}1 + 0{,}14 \cdot 0{,}7 + 0{,}66 \cdot 0{,}2 = 0{,}264$

Aus $y_2^B > y_3^B > y_1^B \Leftrightarrow a_2 \succ a_3 \succ a_1$,

d. h. die Aktion a_2 wird präferiert

Aufgabe 2.2-4

Lösung:

a)

(1) $y^{\mu}(a_1) = 100 \cdot 0{,}1 - 200 \cdot 0{,}7 + 500 \cdot 0{,}2 = -30$

$y^{\mu}(a_2) = 200 \cdot 0{,}1 + 200 \cdot 0{,}2 = 60$

$y^{\mu}(a_3) = 50 \cdot 0{,}1 - 100 \cdot 0{,}7 + 300 \cdot 0{,}2 = -5$

Aus $y^{\mu}(a_2) > y^{\mu}(a_3) > y^{\mu}(a_1) \Leftrightarrow a_2 \succ a_3 \succ a_1$, d. h. es ist die Aktion a_2 zu wählen, mit $A^* = \{a_2\}$.

(2) $P_{r_1} = 0{,}7$

$P_{r_2} = 0$

$P_{r_3} = 0{,}7$

$y^{\mu P_r}(a_1) = 3 \cdot (-30) - 20 \cdot 0{,}7 = -90 - 14 = -104$

$y^{\mu P_r}(a_2) = 3 \cdot 60 - 20 \cdot 0 = 180$

$y^{\mu P_r}(a_3) = 3 \cdot (-5) - 20 \cdot 0{,}7 = -15 - 14 = -29$

Aus $y^{\mu P_r}(a_2) > y^{\mu P_r}(a_3) > y^{\mu P_r}(a_1) \Leftrightarrow a_2 \succ a_3 \succ a_1$, d. h. es ist die Aktion a_2 zu wählen, mit $A^* = \{a_2\}$.

(3) $\sigma_1^2 = 78100$

$\sigma_2^2 = 8400$

$\sigma_3^2 = 25225$

$y^{\mu\sigma}(a_1) = 1 \cdot (-30) - 0{,}1 \cdot (78100 + 900) = -30 - 7900 = -7930$

$y^{\mu\sigma}(a_2) = 1 \cdot 60 - 0{,}1 \cdot (8400 + 3600) = 60 - 1200 = -1140$

$y^{\mu\sigma}(a_3) = 1 \cdot (-5) - 0{,}1 \cdot (25225 + 25) = -5 - 2525 = -2530$

Aus $y^{\mu\sigma}(a_2) > y^{\mu\sigma}(a_3) > y^{\mu\sigma}(a_1) \Leftrightarrow a_2 \succ a_3 \succ a_1$, d. h. es ist die Aktion a_2 zu wählen, mit $A^* = \{a_2\}$.

b) $u(e_{ij}) = w_{ij} - 0{,}1 w_{ij}^2$

$E\,u(e_{1j}) = (100 - 0{,}1 \cdot 100^2) \cdot 0{,}1 + (-200 - 0{,}1 \cdot 200^2) \cdot 0{,}7 + (500 - 0{,}1 \cdot 500^2) \cdot 0{,}2 = -7930$

$E\,u(e_{2j}) = (-200 - 0{,}1 \cdot 200^2) \cdot 0{,}3 + = -1140$

$E\,u(e_{1j}) = (50 - 0{,}1 \cdot 50^2) \cdot 0{,}1 + (-100 - 0{,}1 \cdot 100^2) \cdot 0{,}7 + (300 - 0{,}1 \cdot 300^2) \cdot 0{,}2 = -2530$

Aufgabe 2.2-5

Lösung:

Unter der Annahme der vollständigen Anlage des Betrages stehen folgende Aktionen zur Verfügung:

$$a_1 = (3,0,0)$$
$$a_2 = (2,1,0)$$
$$a_3 = (1,2,0)$$
$$a_4 = (1,0,1)$$
$$a_5 = (0,3,0)$$
$$a_6 = (0,1,1)$$

Es gelten folgende Ergebnisverteilungen:

$\tilde{a}_1$:

e	240	360	390	270
p	0,2	0,5	0,1	0,2

;

$\tilde{a}_2$:

e	270	360	360	260
p	0,2	0,5	0,1	0,2

$\tilde{a}_3$:

e	300	360	330	250
p	0,2	0,5	0,1	0,2

;

$\tilde{a}_4$:

e	260	390	430	230
p	0,2	0,5	0,1	0,2

$\tilde{a}_5$:

e	330	360	300	240
p	0,2	0,5	0,1	0,2

;

$\tilde{a}_6$:

e	290	390	400	220
p	0,2	0,5	0,1	0,2

Nach dem μ-σ- Prinzip gilt:

$$E(\tilde{a}_1) = 321 \quad var(\tilde{a}_1) = 3069 \qquad ; \qquad E(\tilde{a}_4) = 336 \quad var(\tilde{a}_4) = 5744$$
$$E(\tilde{a}_2) = 322 \quad var(\tilde{a}_2) = 2176 \qquad ; \qquad E(\tilde{a}_5) = 324 \quad var(\tilde{a}_5) = 2124$$
$$E(\tilde{a}_3) = 323 \quad var(\tilde{a}_3) = 1861 \qquad ; \qquad E(\tilde{a}_6) = 337 \quad var(\tilde{a}_6) = 4981$$
$$a_6 \succ a_4;\; a_5 \succ a_2;\; a_5 \succ a_1;\; a_3 \succ a_2;\; a_3 \succ a_1$$

$$y^{\mu\sigma}(a_i) = 20\mu_i - 0{,}02\left(\mu_i^2 + \sigma_i^2\right)$$
$$u\left(e_{ij}\right) = b_1 \cdot w(e_{ij}) + b_2 \cdot w\left(e_{ij}\right)^2$$
$$y^{\mu\sigma}(a_3) = 20 \cdot 323 - 0{,}02(104329 + 1861) = 6460 - 2123{,}8 = 4336{,}2$$
$$y^{\mu\sigma}(a_5) = 20 \cdot 324 - 0{,}02(104976 + 2124) = 6480 - 2142 = 4338$$
$$y^{\mu\sigma}(a_6) = 20 \cdot 337 - 0{,}02(113569 + 4981) = 6740 - 2371 = 4369$$

Aus $y^{\mu\sigma}(a_6) > y^{\mu\sigma}(a_5) > y^{\mu\sigma}(a_3) \Leftrightarrow a_6 \succ a_5 \succ a_3$, d. h. es ist jeweils Wertpapier vom Typ P_2 bzw. P_3 zu erwerben.

Nach dem Bernoulli-Prinzip gilt:

$u(220) = 20 \cdot 220 - 0,02 \cdot 220^2 = 3432$

$u(230) = 20 \cdot 230 - 0,02 \cdot 230^2 = 3542$

$u(240) = 20 \cdot 240 - 0,02 \cdot 240^2 = 3648$

$u(250) = 20 \cdot 250 - 0,02 \cdot 250^2 = 3750$

$u(260) = 20 \cdot 260 - 0,02 \cdot 260^2 = 3848$

$u(270) = 20 \cdot 270 - 0,02 \cdot 270^2 = 3942$

$u(290) = 20 \cdot 290 - 0,02 \cdot 290^2 = 4118$

$u(300) = 20 \cdot 300 - 0,02 \cdot 300^2 = 4200$

$u(330) = 20 \cdot 330 - 0,02 \cdot 330^2 = 4422$

$u(360) = 20 \cdot 360 - 0,02 \cdot 360^2 = 4608$

$u(390) = 20 \cdot 390 - 0,02 \cdot 390^2 = 4758$

$u(400) = 20 \cdot 400 - 0,02 \cdot 400^2 = 4800$

$u(430) = 20 \cdot 430 - 0,02 \cdot 430^2 = 4902$

$y^B(a_1) = 3648 \cdot 0,2 + 4608 \cdot 0,5 + 4758 \cdot 0,1 + 3942 \cdot 0,2 = 4297,8$

$y^B(a_2) = 3942 \cdot 0,2 + 4608 \cdot 0,5 + 3848 \cdot 0,2 = 4322,8$

$y^B(a_3) = 4200 \cdot 0,2 + 4608 \cdot 0,5 + 4422 \cdot 0,1 + 3750 \cdot 0,2 = 4336,2$

$y^B(a_4) = 3848 \cdot 0,2 + 4758 \cdot 0,5 + 4902 \cdot 0,1 + 3542 \cdot 0,2 = 4347,2$

$y^B(a_5) = 4422 \cdot 0,2 + 4608 \cdot 0,5 + 4200 \cdot 0,1 + 3648 \cdot 0,2 = 4338,0$

$y^B(a_6) = 4118 \cdot 0,2 + 4758 \cdot 0,5 + 4800 \cdot 0,1 + 3432 \cdot 0,2 = 4369,0$

$y^B(a^*) = \max y^B(a_i) = y^B(a_6) \qquad \Rightarrow A^* = \{a_6\}$

Es ist je ein Papier von Typ 2 bzw. Typ 3 zu erwerben.