Lösungsskizzen zu Kapitel 2.1.3

Aufgabe 2.1-1

Lösung:

1. Ordinalskala
1. Verhältnisskala
2. Intervallskala
3. Verhältnisskala

Aufgabe 2.1-2

Lösung:

1. Der Vektor $x_3 = (20, 20, 80)$ dominiert den Vektor $x_1 = (20, 10, 80)$ streng. Die Vektoren x_2 und x_3 sind in dieser Hinsicht nicht vergleichbar.

Für die Menge der K-effizienten Vektoren gilt:

$$K = \{x_2, x_3\}$$

2. Wendet man die Funktionen z_1 und z_2 auf die Vektoren x_1, x_2 und x_3 an, so erhält man:

$$z_1(x_1) = 5 \cdot 20 + 3 \cdot 10 - 80 = 100 + 30 - 80 = 50$$
$$z_2(x_1) = 2 \cdot 20 - 10 + 2 \cdot 80 = 40 - 10 + 160 = 190$$
$$z_1(x_2) = 5 \cdot 30 + 3 \cdot 10 - 60 = 150 + 30 - 60 = 120$$
$$z_2(x_2) = 2 \cdot 30 - 10 + 2 \cdot 60 = 60 - 10 + 120 = 170$$
$$z_1(x_3) = 5 \cdot 20 + 3 \cdot 20 - 80 = 100 + 60 - 80 = 80$$
$$z_2(x_3) = 2 \cdot 20 - 20 + 2 \cdot 80 = 40 - 20 + 160 = 180$$

Keiner der Vektoren (50,190), (120,170), (80,180) wird von einem anderen streng dominiert, d.h. für die Menge der funktional effizienten Vektoren gilt:

$$F = \{x_1, x_2, x_3\}$$

Aufgabe 2.1-3

Lösung:

Die Menge der K-effizienten Aktionen wird durch die Verbindungslinie zwischen den Produktionsmengenkombinationen (0,120) und (60,30) beschrieben.

Da die Zielfunktion in x_A und x_B streng monoton steigt, ist die Menge der K-effizienten Aktionen mit der Menge der funktional-effizienten Aktionen identisch.

Die optimale Aktion, d.h. die Lösung des Problems kann nur aus der Menge der funktional-effizienten Aktionen und damit im speziellen Fall aus der Menge der K-effizienten Aktionen stammen.

Aufgabe 2.1-4

Lösung:

a) Effizienzkriterium

Die Nutzenmatrix lautet:

	s_1		
a_1	8	4	7
a_2	5	7	9

Keine der beiden Aktionen dominiert die andere streng, d. h. mit Hilfe der Effizienzüberlegung kann die optimale Aktion nicht ermittelt werden.

b) Goal-Programming – starrer Ansatz

Die individuellen Maxima lauten: 8,7,9

$$y^{GP_s}(a^*) = \min\{(8-8)+(7-4)+(9-7);(8-5)+(7-7)(9-9)\} = \min\{0+3+2;3+0+0\} = 3$$

Das Maximum wird bei Wahl der Aktion a_2 realisiert, d.h. $A^* = \{a_2\}$

c) Goal-Programming – flexibler Ansatz

Annahme: $\overline{w}^{(1)} = 7;\ \overline{w}^{(2)} = 9;\ \overline{w}^{(3)} = 8$

$$y^{GP_f}(a^*) = \min\{|7-8|+|9-4|+|8-7|;|7-5|+|9-7|+|8-9|\} = \min\{1+5+1;2+2+1\} = 5$$

Das Maximum tritt bei Wahl von a_2 auf, d. h. $A^* = \{a_2\}$

d) Lexikographische Ordnung

Annahme: $z_1 \succ z_3 \succ z_2$

Bezüglich der Zielgröße z_1 wird die Aktion a_1 eindeutig präferiert, d. h. es gilt: $A^* = \{a_1\}$

e) Zielgewichtung – starr

Annahme: $z_1 : z_2 : z_3$ wie 10 : 8 : 3

$$y^{G_s}(a^*) = \max\{(8\cdot 10+4\cdot 8+7\cdot 3);(5\cdot 10+7\cdot 8+9\cdot 3)\} =$$
$$= \max\{80+32+21;50+56+27\} = \max\{133;133\} = 133$$

Beide Aktionen sind gleichwertig zu betrachten, d. h. es gilt: $A^* = \{a_1, a_2\}$

f) Zielgewichtung – flexibel

Annahme: $g^{(1)}(w) = 3\cdot\sqrt{w}$ $\quad g^{(2)}(w) = 6+0{,}1\cdot w$ $\quad g^{(3)}(w) = 4-0{,}2\cdot w$

$g^{(1)}(8) = 2{,}83$ $\quad g^{(2)}(4) = 6{,}4$ $\quad g^{(3)}(7) = 2{,}6$

$g^{(1)}(5) = 2{,}24$ $\quad g^{(2)}(7) = 6{,}7$ $\quad g^{(3)}(9) = 2{,}2$

$$y^{G_f}(a^*) = \max\{(8\cdot 2{,}83+4\cdot 6{,}4+7\cdot 2{,}6);(5\cdot 2{,}24+7\cdot 6{,}7+9\cdot 2{,}2)\} = \max\{66{,}44;77{,}90\} = 77{,}90$$

$A^* = \{a_2\}$

g) Punktbewertung

Annahme: Gewichtung zwischen den Zielen $z_1 : z_2 : z_3$ wie 10 : 8 : 2 bzw. 0,5 : 0,4 : 0,1

z_1	Punktwert
$e^{(1)} < 3$	0
$3 \le e^{(1)} < 6$	3
$6 \le e^{(1)} < 10$	5
$10 \le e^{(1)}$	8

z_2	Punktwert
$e^{(2)} < 2$	1
$2 \le e^{(2)} < 5$	5
$5 \le e^{(2)} < 8$	6
$8 \le e^{(2)}$	8

z_3	Punktwert
$e^{(3)} < 1$	0
$1 \le e^{(3)} < 6$	3
$6 \le e^{(3)} < 8$	5
$8 \le e^{(3)}$	8

$$\begin{aligned} y^S(a^*) &= \max\left\{(5\cdot 0,5+5\cdot 0,4+5\cdot 0,1);(3\cdot 0,5+6\cdot 0,4+8\cdot 0,1)\right\} \\ &= \max\left\{(2,5+2,0+0,5);(1,5+2,4+0,8)\right\} = \max\{5,0;4,7\} = 5,0 \end{aligned}$$

Dieser Wert lässt sich durch die Wahl der Aktion a_1 realisieren, d. h. $A^* = \{a_1\}$

Aufgabe 2.1-5

Lösung:

1. Zur mathematischen Formulierung des Problems wählen wir folgende Variablen:
   x_1: mit Rosen zu bepflanzende Fläche (in m^2)
   x_2: mit Nelken zu bepflanzende Fläche (in m^2)

Damit erhalten wir folgendes Modell:

$$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max!$$

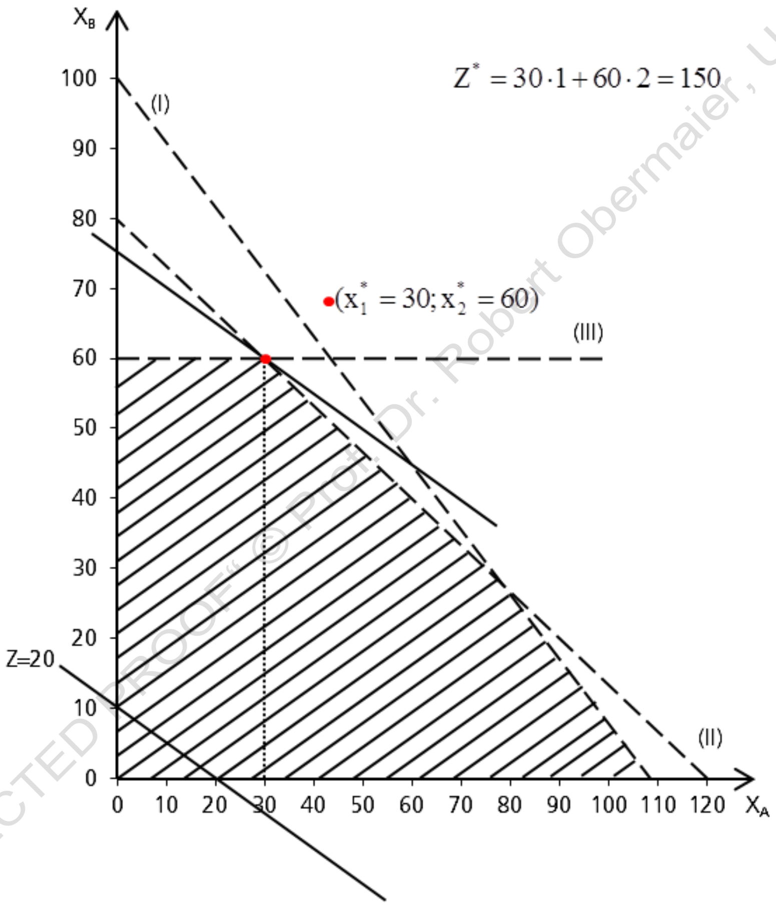
Unter den Nebenbedingungen:

$$x_1 + x_2 \leq 100 \qquad \text{(I)}$$

$$6x_1 + 9x_2 \leq 720 \qquad \text{(II)}$$

$$x_2 \leq 60 \qquad \text{(III)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



2. Problem muss zunächst in Standardform überführt werden:
$Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max!$

Unter den Nebenbedingungen:

$x_1 + x_2 + y_1 = 100$ (I)

$6x_1 + 9x_2 + y_2 = 720$ (II)

$x_2 + y_3 = 60$ (III)

$x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Erste zulässige Lösung: $x_1 = x_2 = 0$
$y_1 = 100$; $y_2 = 720$; $y_3 = 60$

Zielfunktionszeile: $Z - x_1 - 2x_2 = 0$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RS	
y_1	1	1	1	0	0	100	(I)
y_2	6	9	0	1	0	720	(II)
y_3	0	1	0	0	1	60	(III)
Z	-1	-2	0	0	0	0	(IV)

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RS		
y_1	1	0	1	0	-1	40	(I)-(III)	(I‘)
y_2	6	0	0	1	-9	180	$(II) - 9 \cdot (III)$	(II‘)
y_3	0	1	0	0	1	60	(III)	(III‘)
Z	-1	0	0	0	2	120	$(IV) + 2 \cdot (III)$	(IV‘)

$\Rightarrow$ Zweite Basislösung: $x_2 = 60,\ y_1 = 40,\ y_2 = 180,\ x_1 = y_3 = 0,\ Z = 120$

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	RS		
y_1	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	10	$(I') - \frac{1}{6} \cdot (II')$	(I“)
y_2	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$	30	$\frac{1}{6} \cdot (II')$	(II“)
y_3	0	1	0	0	1	60	(III‘)	(III“)
Z	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	150	$(IV') + \frac{1}{6} \cdot (II')$	(IV“)

$\Rightarrow$ Optimale Basislösung: $x_1 = 30,\ x_2 = 60,\ y_1 = 10,\ y_2 = y_3 = 0,\ Z = 150$

Aufgabe 2.1-6

Lösung:

1. Bewertungsskala nach Saaty (1980), siehe Vorlesungsunterlagen:

Skalenwert	Beschreibung
1	Gleich wichtig, gleiche Bedeutung
3	Etwas wichtiger, etwas zu präferieren, etwas größere Bedeutung
5	Erheblich wichtiger, erheblich zu präferieren, erheblich größere Bedeutung
7	Sehr viel wichtiger, sehr zu präferieren, sehr viel größere Bedeutung
9	Absolut wichtiger, absolut zu präferieren, absolut dominierende Bedeutung
2,4,6,8	Zwischenwerte

Bewertungsmatrix

Geschmack	A	B	C
A	1	3	2
B	$\frac{1}{3}$	1	5
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1

2. 1.Schritt: Berechnung der Spaltensummen

Geschmack	A	B	C
A	1	3	2
B	$\frac{1}{3}$	1	5
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	1
$\sum$	$\frac{11}{6}$	$\frac{21}{5}$	8

2. Schritt: Normierte Matrix

Geschmack	A	B	C
A	$\frac{6}{11}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{2}{8}$
B	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{8}$
C	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{8}$
$\sum$	1	1	1

3. Schritt: Zeilensummen

Geschmack	A	B	C	$\sum$
A	$\frac{6}{11}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{2}{8}$	1,510
B	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{8}$	1,045
C	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{8}$	0,445
$\sum$	1	1	1	3

4. Schritt: Teilgewichte

Geschmack	A	B	C	$\sum$	TG
A	$\frac{6}{11}$	$\frac{15}{21}$	$\frac{2}{8}$	1,510	0,503
B	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{5}{8}$	1,045	0,348
C	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{8}$	0,445	0,148
$\sum$	1	1	1	3	1

3. Konsistenzprüfung

1. Schritt: Durchschnittsmatrix

Geschmack	A	B	C
A	$0,503 \cdot 1 =$ $0,503$	$0,348 \cdot 3 =$ $1,044$	$0,148 \cdot 2 =$ $0,296$
B	0,168	0,348	0,740
C	0,252	0,070	0,148

2. Schritt: Berechnung der Zeilensummen

Geschmack	A	B	C	r_i^*
A	0,503	1,044	0,296	1,843
B	0,168	0,348	0,740	1,256
C	0,252	0,070	0,148	0,470

3. Schritt: Normierung auf Basis der Gewichte

Geschmack	A	B	C	r_i^*	λ_i
A	0,503	1,044	0,296	1,843	$1,843 \div 0,503 = 3,664$
B	0,168	0,348	0,740	1,256	$1,256 \div 0,348 = 3,609$
C	0,252	0,070	0,148	0,470	$0,470 \div 0,148 = 3,176$

4. Schritt: Spaltensumme

Geschmack	A	B	C	r_i^*	λ_i
A	0,503	1,044	0,296	1,843	3,664
B	0,168	0,348	0,740	1,256	3,609
C	0,252	0,070	0,148	0,470	3,176
					10,449

5. Schritt: Bestimmung von λ_{max}

$$\lambda_{max} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n} = \frac{10,449}{3} = 3,483$$

6. Schritt: Ermittlung des Konsistenzindex (Consistency Index, CI)

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1} = 0,242$$

7. Schritt: Ermittlung der Konsistenzkennzahl (Consistency Ratio, CR)

$$CR = \frac{CI}{R} = \frac{0,242}{0,58} = 0,417 > 0,1 \Rightarrow \text{ Einschätzungen nicht konsistent!}$$

Zufallskonsistenz R in Abhängigkeit der Matrixgröße h:

n	1	2	3	4	5	…
R	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	…

4. Berechnung der Teilgewichte

	Bewertungsmatrix			Normierte Matrix				
Geschmack	A	B	C	A	B	C	$\sum$	TG
A	1	3	2	$\frac{6}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{10}$	1,574	0,525
B	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$	0,425	0,142
C	$\frac{1}{2}$	3	1	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{10}$	1,001	0,333
$\sum$	$\frac{11}{6}$	7	$\frac{10}{3}$	1	1	1	3	1

Berechnung der Konsistenzkennzahl

Geschmack	A	B	C	r_i^*	λ_i
A	0,525	0,426	0,666	1,617	3,080
B	0,175	0,142	0,111	0,428	3,014
C	0,263	0,426	0,333	1,022	3,069
					9,163

$$\lambda_{max} = \frac{9,163}{3} = 3,054$$

$$CI = \frac{3,054 - 3}{2} = 0,027$$

$$CR = \frac{0,027}{0,58} = 0,047 < 0,1 \Rightarrow \text{Einschätzungen konsistent!}$$