Herausgeber:
Die Gruppe der betriebswirtschaftlichen Professoren
der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität Passau
94030 Passau

Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien

- Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung

Jochen Wilhelm

Diskussionsbeitrag B–9–02

Betriebswirtschaftliche Reihe
ISSN 1435-3539

Adresse des Autors:

Professor Dr. Jochen Wilhelm
Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre
mit Schwerpunkt Finanzierung
Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät der
Universität Passau
94030 Passau

Telefon: 0851/509–2510
Telefax: 0851/509–2512
Email: Jochen.Wilhelm@uni–passau.de

Für den Inhalt der Passauer Diskussionspapiere ist der jeweilige Autor verantwortlich. Es wird gebeten, sich mit Anregungen und Kritik direkt an den Autor zu wenden.

I. Einleitung

In einem kürzlich erschienenen Beitrag[1] analysiert Lutz Kruschwitz gängige Verfahren der Unternehmensbewertung, im Rahmen derer der Unsicherheit künftiger Zahlungsströme durch die Verwendung von Sicherheitheitsäquivalenten oder durch Verrechnung von Risikoprämien im Kalkulationszinsfuß Rechnung getragen werden soll. So begrüßenswert, wie es ist, dass die diesem Verfahren inne wohnenden Inkonsistenzen aufgedeckt werden, ist es umso bedauerlicher, dass sich auch Kruschwitz' Argumentationen als nicht ganz zu Ende gedacht und mit zentralen Positionen und Erkenntnissen der Kapitalmarkttheorie im Konflikt stehend erweisen. Das betrifft vor allem seine in der Zusammenfassung[2] als Ergebnis 1 formulierte Aussage: „Aus Sicht risikoscheuer Kapitalanleger ist das Sicherheitsäquivalent unsicherer Einzahlungen kleiner als ihr Erwartungswert, das Sicherheitsäquivalent unsicherer Auszahlungen dagegen größer als ihr Erwartungswert. Im ersten Fall ist also ein Risikoabschlag vorzunehmen, im zweiten ein Risikozuschlag." Unrichtig (oder an eine nicht akzeptable Prämisse gebunden) ist dabei nicht das Verhältnis von Ein– und Auszahlungen, sondern die jeweilige Teilbehauptung als solche. Sie widerspricht nämlich einer zentralen Erkennnis der Kapitalmarkttheorie, nach der Risikozu– oder –abschläge sich erst im Portfolio–Zusammenhang bestimmen lassen; eine isolierte Beurteilung allein aus Eigenschaften des Bewertungsobjektes verstößt grundsätzlich gegen elementare Prinzipien der Entscheidungs– und Kapitalmarkttheorie. Das soll im Folgenden genauer dargelegt werden.

II. Bewertung im Arbitrage–freien Kapitalmarkt

a. Der Einperiodenfall

Zur Erläuterung der Problemlage stellen wir die Bewertungsaufgabe zunächst in den Kontext eines Arbitrage–freien Kapitalmarktes. Es sollte klar sein, dass in diesem Fall die **Markt**bewertung an die Stelle der **Individual**bewertung treten kann; wer dieser Argumentation nicht folgen mag, den verweisen wir auf Abschnitt III. Zur Vereinfachung der Argumentation betrachten wir zunächst ein Unternehmen, das in nur einem Zeitpunkt t unsichere Zahlungen (gleichgültig, ob Ein– oder Auszahlungen: wir erkennen das am Vorzeichen, positive Werte sind Einzahlungen) in Höhe von X erwarten lässt; der Bewertungszeitpunkt sei $t = 0$. Am Arbitrage–freien Kapitalmarkt existiert nun ein Bewertungsfunktional, das durch eine unsichere Größe $Q_t \geq 0$ ($t = 1, 2, \dots$), den **stochastischen Diskontierungsfaktor**, repräsentiert werden kann[3]. Der Wert des Unternehmens beträgt dann

$$V_0(X) = E(Q_t \cdot X) \tag{1}$$

wobei E den Erwartungswert kennzeichnet. Nun gilt (sog. „Verschiebungssatz" der Kovarianz)

$$E(Q_t \cdot X) = E(Q_t) \cdot E(X) + \mathrm{cov}(Q_t, X) \tag{2}$$

(cov ist die Kovarianz) und daher

$$V_0(X) = E(Q_t) \left\{ E(X) + \mathrm{cov}\left(\frac{Q_t}{E(Q_t)}, X \right) \right\} \tag{3}$$

Beachtet man nun, dass $E(Q_t)$ der Diskontierungsfaktor $D_{0,t}$ für Risiko–freie Anlagen über die Periode $[0, t]$ ist (bei flacher Zinsstruktur gilt $D_{0,t} = (1 + r_f)^{-t}$ mit „dem“ Zinssatz r_f für risikofreie Anlagen; fehlt die Voraussetzung einer flachen Zinsstruktur, gilt $D_{0,t} = (1 + r_{0,t})^{-t}$ mit dem Laufzeit–bezogenen Zinssatz $r_{0,t}$), dann hat man

$$V_0(X) = D_{0,t} \left\{ E(X) + \mathrm{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X \right) \right\} \tag{4}$$

Ein Vergleich mit Gleichung (3) in Kruschwitz’ Ausführungen zeigt[4], dass hier (zumindest formal) ein Sicherheitsäquivalent in Höhe von

$$S_t(X) = E(X) + \mathrm{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X \right) \tag{5}$$

verrechnet wird. Um neben der formalen Identität auch die materielle Identität zu prüfen, ersetzen wir in (1) den unsicheren Strom X durch sein „Sicherheitsäquivalent“ gemäß (5); nun finden wir

$$E(Q_t \cdot S_t(X)) = S_t(X) \cdot E(Q_t) = S_t(X) \cdot D_{0,t}$$

Unter Verwendung von (5) sehen wir $S_t(X) \cdot D_{0,t} = D_{0,t} \left\{ E(X) + \mathrm{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X \right) \right\}$ und daher mit (3)

$$V_0(X) = E(Q_t \cdot S_t(X)) \tag{6}$$

Der Untrnehmenswert V_0 kann daher auch dadurch ermittelt werden, dass man in (1) den unsicheren Strom X durch sein Sicherheitsäquivalent gemäß (5) ersetzt.

Die Gleichung (5) weist allerdings nach, dass das in der Einleitung zitierte „Ergebnis 1“ von Kruschwitz unzutreffend ist: Über das Vorzeichen der Kovarianz $\mathrm{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X \right)$ kann keine a priori richtige Aussage gemacht werden, außer der, dass es unbestimmt sei.

Daraus folgt im Übrigen auch, dass die Aussagen über Sicherheitsäquivalente von Auszahlungen in differenzierterem Licht gesehen werden müssen. Gehen wir nämlich von X zu

$X_A = -X$ über, indem wir terminologisch von Einzahlungen auf Auszahlungen umstellen, dann gilt

$$V_0(X_A) = V_0(-X) = -V_0(X) \tag{7}$$

so dass

$$\begin{aligned} V_0(X_A) &= -D_{0,t}\left\{E(X) + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X\right)\right\} \\ &= D_{0,t}\left\{E(-X) + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, -X\right)\right\} \\ &= D_{0,t}\left\{E(X_A) + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X_A\right)\right\} \end{aligned}$$

folgt; das Vorzeichen von $\operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X_A\right)$ ist aber nun dem von $\operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X\right)$ gerade entgegengesetzt. Daher gilt: **Wenn das Sicherheitsäquivalent unsicherer Einzahlungen kleiner als ihr Erwartungswert ist, ist das Sicherheitsäquivalent von <u>betragsmäßig identischen</u> Auszahlungen größer als ihr Erwartungswert;** aber: **Wenn das Sicherheitsäquivalent unsicherer Einzahlungen größer ist als ihr Erwartungswert, ist das Sicherheitsäquivalent von <u>betragsmäßig identischen</u> Auszahlungen kleiner als ihr Erwartungswert**.

Ob man das Risiko im Sicherheitsäquivalent oder in einer Korrektur der Diskontierung erfasst, ist natürlich nur Sache des Geschmackes oder der Fragestellung, wenn man nur konsistent bleibt: Gleichung (4) lässt sich offensichtlich auch so schreiben:

$$V_0(X) = E(X) \cdot \left\{D_{0,t}\left[1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)\right]\right\} \tag{8}$$

Dabei übernimmt der Ausdruck $a_t(X) = 1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_r}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)$ die Rolle eines **Risikoadjustierungsfaktors** für den Diskontierungsfaktor. Offensichtlich weist $a_t(X)$ **keinen** systematischen Zeiteffekt auf. Will man diesen Adjustierungsfaktor allerdings gewaltsam in einen additiven Zu- oder Abschlagsfaktor z_t zum Zinssatz auf Periodenbasis umrechnen, ergibt sich z. B. folgendes Bild

$$\big(1 + r_{0,t} + z_t(X)\big)^{-t} = (1 + r_{0,t})^{-t}\left[1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)\right] \tag{9}$$

oder nach leichter Umformung

$$z_t(X) = (1 + r_{0,t})\left\{\left[1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)\right]^{-1/t} - 1\right\} \tag{10}$$

In Gleichung (10) zeigt sich – selbst bei flacher Zinsstruktur und im Falle einer zeit–unabhängigen Größe $\operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)$ – ein systematischer Zeiteffekt (selbst unter den genannten Bedingungen ist die geschweifte Klammer in (10) zwingend von der zeitlichen Entfernung t des Zahlungsstroms zum Bewertungszeitpunkt abhängig), der in der Literatur zu fruchtlosen Spekulationen Anlass gegeben hat[5], wobei er doch nur dem gewalttätigen Versuch geschuldet wird, in einer Situation mit definitiv **nicht linearen Beziehungen** eine additive Korrektur des Zinssatzes erzwingen zu wollen.

Diese Vorgehensweise wird von Kruschwitz zu Recht kritisiert[6], allerdings schlägt er eine ebenso beliebige Alternative vor; er zerlegt den Risiko–adjustierten Diskontierungsfaktor (die geschweifte Klammer in (8)) – für den Fall einer flachen Zinsstruktur – wie folgt

$$\begin{aligned} D_{0,t} \cdot a_t(X) &= (1+r_f)^{-t} \cdot \left\{ 1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right) \right\} \\ &= (1+r_f)^{-(t-1)} \cdot \frac{1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)}{1+r_f} \end{aligned} \tag{11}$$

und setzt als Risikoprämie die Größe p in der Weise an, dass

$$1 + r_f + p = \frac{1+r_f}{1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)}$$

gilt, also

$$p = -(1+r_f) \cdot \frac{\operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)}{1 + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, \frac{X}{E(X)}\right)} \tag{12}$$

was äquivalent zu Gleichung (10) bei Kruschwitz ist[7], mit der Konsequenz

$$D_{0,t} \cdot a_t(X) = \frac{1}{(1+r_f)^{t-1}} \cdot \frac{1}{1+r_f+p} \tag{13}$$

Kruschwitz spricht von „seinem Verständnis“ „vom vernünftigen Rechnen mit Risikoprämien“[8]. Dem ist einerseits beizupflichten, insofern als die Vorstellung, den unsicheren Strom über diese erste Periode mit einer Risikoprämie zu verrechnen, danach aber als sicher zu behandeln, intuitiv nicht unvernünftig ist, zwingend geboten ist sie aber ebenso wenig wie die Setzung in (9); das wird besonders deutlich, wenn man sich den Fall einer nicht flachen Zinsstruktur und die Tatsache vor Augen hält, dass es sich bei den periodischen Zinssätzen r_f um **Termin**zinssätze und nicht um zukünftige **Kassa**zinssätze handelt. Schließlich bietet (8) eine weitere Alternative, in der ein – unter den gleichen

Prämissen wie bei Kruschwitz gleicher – **Prozentsatz auf den Fristigkeits–adäquaten Diskontierungsfaktor** $D_{0,t} = (1 + r_{0,t})^{-t}$ als Ausgleich für das Risiko erhoben wird. Es erweist sich hier deutlich, dass man zwischen dem Gehalt einer mathematischen Beziehung und ihrer Interpretation stets sorgfältig unterscheiden muss; die Interpretation ist nur eine façon de parler, deren semantischen Gehalt man nicht über Gebühr strapazieren darf.

b. Der Mehrperiodenfall

Um den Mehrperodenfall in einfacher Weise diskutieren zu können, nehmen wir an, das zu bewertende Unternehmen erwirtschafte zu einem weiteren Zeitpunkt τ einen weiteren unsicheren Strom Y. Dann gilt

$$\begin{aligned} V_0(X,Y) &= E(Q_t \cdot X) + E(Q_\tau \cdot Y) \\ &= D_{0,t}\left\{E(X) + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_t}{D_{0,t}}, X\right)\right\} \\ &\quad + D_{0,\tau}\left\{E(Y) + \operatorname{cov}\left(\frac{Q_\tau}{D_{0,\tau}}, Y\right)\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

Offensichtlich ergeben sich keinerlei neue Aspekte. Die Risiko-adjustierten Diskontierungsfaktoren sind

$$D_{0,t} \cdot a_t(X) \quad \text{und} \quad D_{0,\tau} \cdot a_\tau(Y)$$

Eine Umrechnung gemäß (12) ist natürlich ebenso möglich. Vielmehr zeigt sich, dass die Methodendiskussion weniger mit der Mehrperiodigkeit des Problems zu tun hat, als vielmehr mit der Wahl der Referenzperiode für die Bemessung des Zinssatzes: Es ist allein der Zinsbegriff, der zu Irritationen führt, weil er durch seine begriffliche Konzeption als nicht lineare Funktion von Zahlungsstromgrößen Nichtlinearitäten ins Spiel bringt. Auf eine weitere Analyse soll daher verzichtet werden.

III. Die Bewertung im Individualkalkül

a. Spanning ist gegeben

Wer der Argumentation nicht folgen mochte, dass im Arbitrage–freien Markt die Individualbewertung der Marktbewertung entsprechen müsse, erhält nachfolgend ein Angebot, in dem ausdrücklich auf die Position eines individuellen Bewerters Bezug genommen wird.

Der Mehrperiodenfall ist im Individualkalkül besonders schwierig; da wesentliche Thesen der Literatur aber auch schon im Einperiodenfall kritisch betrachtet werden können, wollen wir uns in diesem Beitrag auf die einfachere Situation konzentrieren und den Mehrperiodenfall einer späteren Ausarbeitung vorbehalten[9]. Wir stellen uns die Aufgabe, den Eigner eines bisher in seinem Alleineigentum befindlichen Unternehmens zu modellieren, dem dann ausschließlich ein Übernahmeangebot unterbreitet wird. Wir werden sehen, dass die Fälle, in denen das Unternehmen anschließend am Kapitalmarkt gehandelt wird, und jener, in dem das nicht der Fall ist, durchaus zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

Sei X der durch das in Rede stehende Unternehmen zu erwirtschaftende (unsichere) Rückfluss, Z ein Vektor von Rückströmen handelbarer Kapitalmarkttitel, P derer Vektor der Preise, h sonstiges nicht handelbares Einkommen des betrachteten Wirtschaftssubjektes, x das zu bildende Portfolio in Kapitalmarkttiteln und w_0 das in Zahlungsmitteln vorliegende sonstige Anfangsvermögen. Wird das Unternehmen vom betrachteten Wirtschaftssubjekt weitergeführt, so ergibt sich für diese Situation die folgende Opportunitätsmenge;[10]aus $w_0 = x^T \cdot P + v_0$ und $w_1 = x^T \cdot Z + X + h + (1 + r_f) \cdot v_0$, wobei v_0 der Betrag ist, der risikofrei investiert wird, folgt durch Elimination von v_0:

$$w_1 = x^T \cdot Z + X + h + (w_0 - x^T \cdot P)(1 + r_f) \tag{15}$$

(r_f bezeichnet hier den einperiodigen Zinssatz für risikofreie Anlagen).

Betrachten wir nun ein Übernahmeangebot, das an Stelle von X in $t = 1$ den sicheren Betrag $S(X)$ in $t = 1$ offeriert; wie ändert sich die Opportunitätsmenge? Versehen wir sich eventuell ändernde Größen mit einem "$\widehat{\ }$", so erhalten wir

$$\hat{w}_1 = \hat{x}^T \cdot Z + S(X) + h + (w_0 - \hat{x}^T \cdot P)(1 + r_f) \tag{16}$$

In dieser Formulierung setzen wir voraus, dass das Wirtschaftssubjekt nach der Transaktion nicht mehr die Möglichkeit hat, Anteile an „seinem alten“ Unternehmen zu erwerben, d. h. es befindet sich nachher in „neuem“ Alleineigentum.

Wie kann man in diesem Zusammenhang die Frage nach dem Sicherheitsäquivalent stellen? Eine hinreichende Antwort ist sicher diese: Wenn sich durch die Transaktion die Opportunitätsmenge des betrachteten Wirtschaftssubjektes **nicht** ändert, kann man $S(X)$ den Charakter eines Sicherheitsäquivalentes nicht absprechen. Präzisiert heißt diese Bedingung: Zu jedem Portfolio x gibt es ein Portfolio $\hat{x}$, so dass (15) und (16) übereinstimmen (und umgekehrt). Hier kann man von einem **präferenzfreien** Sicherheitsäquivalent sprechen; es muss dann gelten

$$(x - \hat{x})^T \cdot Z + X - S(X) - (1 + r_f) \cdot (x - \hat{x})^T \cdot P = 0 \tag{17}$$

In dieser Gleichung gibt es nur zwei unsichere Größen: Der Rückstrom X des Unternehmens und der Differenzrückstrom aus zwei Portfolios marktgängiger Kapitalmarktanlagen. Gleichung (17) bedeutet daher, dass ein präferenzfreies Sicherheitsäquivalent dann existiert, wenn der Rückstrom des Unternehmens durch die sichere Anlage und ein Portfolio y marktgängiger Kapitalmarktanlagen dupliziert werden kann;[11] dann gilt nämlich

$$X = x_0 + y^T \cdot Z \tag{18}$$

mit dem sicheren Rückstrom x_0; wenn man nun nämlich $\hat{x} = y + x$ setzt, (17) nach $S(X)$ auflöst und $\hat{x}$ einsetzt, ergibt sich zunächst $S(X) = -y^T \cdot Z + X - (1 + r_f)y^T \cdot P$ und unter Verwendung von (18) schließlich

$$S(X) = x_0 + y^T \cdot P \cdot (1 + r_f) \tag{19}$$

Wir halten fest: Es gibt dann ein präferenzfreies Sicherheitsäquivalent, wenn der Rückstrom x des zu bewertenden Unternehmens durch marktgängige Anlageformen duplizierbar ist; diese Situation nennt man auch „Spanning“[12].

Soll der Verzicht auf das Unternehmen durch eine Zahlung in Höhe von V_0 im Zeitpunkt 0 bewirkt werden, ist (16) in der Form

$$\hat{w}_1 = \hat{x}^T \cdot Z + h + (w_0 + V_0 - \hat{x}^T \cdot P)(1 + r_f) \tag{20}$$

mit (15) zu vergleichen. Mit der Spanning–Annahme (18) ergibt sich als Bedingung:

$$(x - \hat{x})^T \cdot Z + x_0 + y^T \cdot Z - V_0(1 + r_f) - (x - \hat{x})^T \cdot P(1 + r_f) = 0$$

Hieraus folgt wiederum

$$V_0(1 + r_f) = x_0 + y^T \cdot P\,(1 + r_f) \tag{21}$$

was im Vergleich mit (19) die bekannte Beziehung

$$V_0 = \frac{S(X)}{1 + r_f} \tag{22}$$

liefert. Das Ergebnis stimmt (natürlich) mit (3) und (4) überein, da der Fall von Spanning das Bewertungsobjekt gewissermaßen in den Kapitalmarkt spiegelt: Man darf nun getrost die Formel (5) zur Bewertung verwenden, wenn man den Kapitalmarkt (der übrigen Wertpapiere) als Arbitrage–frei unterstellt.

Zu klären ist noch die Frage, welcher Zusammenhang zwischen Sicherheitäquivalent und Erwartungswert des Unternehmensrückstroms besteht. Die Verwendung von (18) und (19) führt auf

$$E(X) - S(X) = y^T \cdot \{E(Z) - (1 + r_f) \cdot P\} \tag{23}$$

Auch hier erkennen wir deutlich, dass keine von der Empirie unabhängige Aussage über das Vorzeichen des „Risikozuschlages“ gemacht werden kann: Das Vorzeichen hängt davon ab, ob das zur Duplikation des Rückstroms des Unternehmens dienende Portfolio eine positive oder eine negative Risikoprämie aufweist. Wie wir aus der Theorie des Capital Asset Pricing Model wissen, sind negative Risikoprämien theoretisch keineswegs auszuschließen, zumal wenn wir über Portfolios reden, in denen auch Leerverkaufspositionen auftreten können.

Das hier für den Einperiodenfall erzielte Ergebnis lässt sich ohne große Mühe auf den Mehrperiodenfall erweitern. Die Annahme von „Spanning“ ist hier durch die Annahme von „bedingtem Spanning“ zu ersetzen; „bedingtes Spanning“ liegt dann vor, wenn ein im Zeitpunkt t zu erwartender Strom X spätestens in $t-1$ durch ein Portfolio duplizierbar ist, das auf der Grundlage von Informationen gebildet werden kann, die bis zum Zeitpunkt $t-1$ eingetroffen sind. Die Vorgehensweise entspricht der Technik der Optionsbewertung durch Hedge–Portfolios und soll hier nicht weiter geschildert werden.

In dieser Betrachtungsweise war unterstellt worden, dass nach Transaktion des Unternehmens ebenfalls nicht am Kapitalmarkt gehandelt wird. Wird es aber am Kapitalmarkt placiert, ist die Spanning–Annahme automatisch erfüllt, so dass in diesem Fall stets ein Präferenz–freies Sicherheitsäquivalent analog zu (23) existiert.

b. Spanning ist nicht unbedingt gegeben

Ist die Spanning-Annahme (18) nicht erfüllt (wir wissen jetzt, dass notwendiger Weise das Unternehmen nach der Transaktion nicht am Kapitalmarkt gehandelt wird), kann mit der Existenz eines präferenzfreien Sicherheitsäquivalentes nicht mehr gerechnet werden. Diese Situation scheint in der Literatur zur Unternehmensbewertung im Vordergrund der Überlegungen zu stehen.

Es erscheint folglich unausweichlich, eine bestimmte Form von Präferenz für unsichere Ströme zu unterstellen. Wir bedienen uns hier des zwar nicht unumstrittenen, aber doch weithin akzeptierten und etablierten Konzepts des Erwartungsnutzens. Sei also u die relevante Nutzenfunktion des betrachteten Wirtschaftssubjektes, dann steht es zur optimalen Strukturierung seiner Verögensverhältnisse vor folgender Aufgabe:

> Maximiere $E\{u(w_1)\}$ (wobei w_1 durch (15) gegeben wird) durch geeignete Wahl des Portfolios x!

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung lauten:

$$0 = \frac{d}{dx} E(u(w_1)) = E\big\{u'(w_1)[Z - (1 + r_f)\, P]\big\} \tag{24}$$

wobei gemäß (15) (etwas umgeformt)

$$w_1 = x^T \cdot (Z - (1 + r_f)P) + X + h + w_0(1 + r_f) \tag{25}$$

mit optimalem Portfolio x gilt. Durch (24) und (25) wird die optimale Vermögensposition des Wirtschaftssubjektes bestimmt, zu dessen Gesamtvermögen das in Rede stehende Unternehmen gehört. Um nun ein korrektes Sicherheitsäquivalent $S(X)$ zu bestimmen, müsste man das Problem (24) mit

$$w_1 = x_S^T(Z - (1 + r_f)P) + S(X) + h + w_0(1 + r_f) \tag{26}$$

anstelle von (25) für das Portfolio x_S lösen, die Nutzenwerte der beiden Optimallösungen gleich setzen und die resultierende Gleichung nach $S(X)$ auflösen, eine Vorgehensweise, die weit komplizierter ist, als die in der Literatur nahe gelegten Prozeduren. Ganz sicher ist, dass das Sicherheitsäquivalent vom Anfangsvermögen w_0 und vom sonstigen nicht marktfähigen Einkommen h, aber auch von den weiteren Risikoallokationsmöglichkeiten Z, die durch die marktfähigen Anlageformen erschlossen werden, abhängt.

Eine konkretere Analyse erfordert Einschränkungen der Allgemeinheit. Wir verwenden die exponentielle Nutzenfunktion $u(w) = -\frac{1}{a}\, e^{-a \cdot w}$ und die Normalverteilungsannahme, dann wird aus (24) (zunächst noch ohne diese Annahmen)

$$E\{u'(w_1)\} \cdot E\{Z - (1 + r_f)P\} + \mathrm{COV}(u'(w_1), Z) = 0 \tag{27}$$

Mit der Normalverteilungsannahme gilt[13]

$$E\{u'(w_1)\} \cdot E\{Z - (1 + r_f)P\} + E\{u''(w_1)\} \cdot \mathrm{COV}(w_1, Z) = 0$$

Scliȩßlich führt die exponentielle Nutzenfunktion (wegen $u''(w_1) = -a\, u'(w_1)$ mit $a > 0$) auf

$$E(Z) - (1 + r_f)P - a \cdot \mathrm{COV}(w_1, Z) = 0$$

oder, unter Verwendung von (25)

$$E(Z) - (1 + r_f) \cdot P = a \cdot \mathrm{COV}(x^T \cdot Z + X + h, Z) \tag{28}$$

bzw. unter Verwendung von (26)

$$E(Z) - (1 + r_f) \cdot P = a \cdot \mathrm{COV}(x_S^T \cdot Z + h, Z) \tag{29}$$

(Wir verwenden COV für die Anwendung des Kovarianzoperators auf vektorielle Zufallsgrößen.)

Man sieht schon: Der Übergang von (28) zu (29), d. h. die Annahme des Übernahmeangebots zwingt zu einer Anpassung des Portfolios

$$x = C^{-1}\left\{\frac{1}{a}\big[E(Z)-(1+r_f)\cdot P\big] - \mathrm{COV}(X,Z) - \mathrm{COV}(h,Z)\right\} \tag{30}$$

ist Lösung von (28), während

$$x_S = C^{-1}\left\{\frac{1}{a}\big[E(Z)-(1+r_f)\cdot P\big] - \mathrm{COV}(h,Z)\right\} \tag{31}$$

Lösung von (29) ist (dabei ist C^{-1} die Inverse der Kovarianzmatrix $C = \mathrm{COV}(Z,Z)$). Der Unterschied zwischen beiden Portfolios ist an der Differenz

$$x_S - x = C^{-1}\cdot \mathrm{COV}(X,Z) \tag{32}$$

ablesbar. Sie wird durch ein komplexes stochastisches Zusammenspiel zwischen dem Rückstrom des in Rede stehenden Unternehmens und den marktgängigen Kapitalanlagen bestimmt.

Ein vergleichsweise einfacher Fall ist der, in dem beide Optimalportfolios übereinstimmen; das ist gegeben, wenn $\mathrm{COV}(X,Z) = 0$ gilt, d. h. wenn der Rückstrom des betrachteten Unternehmens mit **allen** marktgängigen Kapitalanlagen unkorreliert ist. Dieser Fall ist gewissermaßen der Extremfall **mangelnden** Spannings! Dann gilt für den Nutzen, wenn das Übernahmeangebot abgelehnt wurde:

$$-\frac{1}{a}\cdot e^{\left[x^T(E(Z)-(1-r_f)\cdot P)+E(X)+E(h)+w_0(1+r_f)\right]+\frac{1}{2}a^2\mathrm{var}(x^TZ+X+h))}$$

Im Falle der Annahme des Übernahmeangebots hätte man

$$-\frac{1}{a}\,e^{-a\left[x^T\left(E(Z)-(1-r_f)\cdot P\right)+S(X)+E(h)+w_0(1+r_f)\right]+\frac{1}{2}a^2\mathrm{var}(x^TZ+h)}$$

Für das Sicherheitsäquivalent $S(X)$ aus Sicht des bisherigen Eigentümers ergibt sich somit die Bedingung

$$S(X) - \frac{1}{2}a\cdot\mathrm{var}(x^TZ+h) = E(X) - \frac{1}{2}a\cdot\mathrm{var}(x^TZ+X+h) \tag{33}$$

Wegen der Annahme $\mathrm{COV}(X,Z) = 0$ folgt noch

$$S(X) = E(X) - \frac{1}{2}a\big[\mathrm{var}(X+h) - \mathrm{var}(h)\big] \tag{34}$$

Unter sehr speziellen Bedingungen haben wir damit einen expliziten Ausdruck für das das in dieser Situation korrekte Sicherheitsäquivalent ermittelt. Es zeigt sich aber erneut, dass das Vorzeichen des „Risikoabschlages“ keineswegs determiniert ist: Ist der Risikozusammenhang zwischen Unternehmen und dem sonstigen nicht marktfähigen Einkommen von der Art, dass die Varianz der verbundenen Position $X + h$ kleiner ist als die von h alleine (Hedging–Effekt), liegt das Sicherheitsäquivalent über dem Erwartungswert. Der Grund ist in diesem Fall der, dass der Rückstrom des Unternehmens einen risikomindernden Einfluss auf sonstige Einkommensbestandteile hat; dieser risikomindernde Einfluss entfällt zum Nachteil des bisherigen Eigentümers, wenn das Unternehmen abgetreten wird.

Obwohl sich auch der allgemeine Fall $\mathrm{COV}(X, Z) \neq 0$ grundsätzlich behandeln ließe, wollen wir darauf in diesem Rahmen verzichten; wir sind der Ansicht, dass grundlegende Einsichten und Richtigstellungen sich bereits aus dem bisher erarbeiteten Material ergeben[14].

IV. Zusammenfassung

In einer Zusammenfassung des oben zur Bewertung eines Unternehmens Ausgeführten lassen sich folgende Punkte als wesentlich vermerken:

– Das Sicherheitsäquivalent als um einen Risikozu– oder –abschlag korrekter Erwartungswert von Rückflüssen lässt sich im Allgemeinen nicht aus Eigenschaften des zu bewertenden Objektes allein ableiten. Vielmehr ist seine Stellung in der Gesamtheit aller Risikoallokationsmöglichkeiten zu sehen.

– Ob ein Risikozu- oder –abschlag vom Erwartungswert vorzunehmen ist, lässt sich nicht verallgemeinernd sagen; das Vorzeichen des zum Erwartungswert hinzu tretenden Korrekturterms hängt vielmehr generell von der Stellung des zu bewertenden Objektes in der Gesamtheit aller Risikoallokationsmöglichkeiten ab.

– In Hinblick auf die Verrechnung von Risikoprämien in den Kalkulationszinssätzen gibt es formal gesehen beliebig viele Möglichkeiten, die alle „richtig “sind, d. h. zu denselben Ergebnissen führen. Ein Streit über die Semantik zugeordneter Interpretationen ist völlig fruchtlos. Interpretationen sollte man zudem niemals an Spezialfällen, wie dem einer flachen Zinsstruktur mit deterministischem Periodenzinssatz, zwingend anknüpfen lassen.

Anmerkungen

[1] Kruschwitz (2001).

[2] Ebenda, S. 2413.

[3] Vgl. dazu Wilhelm (1983a), S. 58 und S. 116, neuerdings wieder Cochrane (2001), S. 33-78.

[4] Kruschwitz (2001), S. 2411.

[5] Ballwieser (1990), S. 171, Schwetzler (2000), S. 472 ff.

[6] Kruschwitz (2001), S. 2412.

[7] Ebenda, S. 2411.

[8] Ebenda, S. 2412.

[9] Kürsten (2000) stellt den Mehrperiodenfall in etwas engeren Kontext auf den Prüfstand und weist gravierende interne Inkonsistenzen der Literaturmeinung nach.

[10] Die folgende Modellierung weist Parallelen zum Portfolio– und Kapitalmarktansatz mit nicht marktfähigem Einkommen (Mayers (1972) und Brito (1977)) auf.

[11] Ansatzweise eine ähnliche Überlegung führt Drukarczyk (1996), S. 337 an, allerdings nur im Zusammenhang mit der Bewertung von Auszahlungen.

[12] Spanning ist eine der unabdingbaren Voraussetzungen für die Gültigkeit der Fisher-Separation in der Investitionstheorie (vgl. DeAngelo (1981) und Wilhelm (1983b)). Spanning spielt ebenfalls eine zentrale Rolle bei der präferenzfreien Bewertung von Optionen und anderen Derivaten.

[13] Der zu Grunde liegende Sachverhalt wird gelegentlich als „Lemma von Rubinstein“ bezeichnet; er geht auf die Quelle Rubinstein (1976) zurück. Mit gemeinsam normal verteilten Größen v und w und einer Funktion f gilt $\mathrm{cov}(f(v), w) = E(f'(v)) \cdot \mathrm{cov}(v, w)$.

[14] Für die Erarbeitung von Ergebnissen im Mehrperiodenfall bietet sich in natürlicher Verallgemeinerung der hier eingesetzten Methode die mehrperiodige exponentielle Nutzenfunktion mit Normalverteilungsannahme an, wie sie in Stapleton und Subrahmanyam (1978) zur Anwendung kommt.

Literatur

Ballwieser, W. (1990). *Unternehmensbewertung und Komplexitätsreduktion*. Gabler Verlag, Wiesbaden, 3. Auflage.

Brito, N. O. (1977). Marketability Restrictions and the Valuation of Capital Assets Under Uncertainty. *Journal of Finance* 32: S. 1109–1123.

Cochrane, J. H. (2001). *Asset Pricing*. Princeton University Press, Princeton/New Jersey.

DeAngelo, H. (1981). Competition and Unanimity. *American Economic Review* 71: S. 18–27.

Drukarczyk, J. (1996). *Unternehmensbewertung*. Verlag Franz Vahlen, München.

Kürsten, W. (2000). Unternehmensbewertung unter Unsicherheit, oder: Theoriedefizit einer Nihilistischen Kunstdiskussion über Sicherheitsäquivalent- - und Risikozuschlagsmethode. Arbeitspapier, Friedrich–Schiller–Universität Jena, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Jena.

Kruschwitz, L. (2001). Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien in der Unternehmensbewertung. *Der Betrieb* 54: S. 2409–2413.

Mayers, D. (1972). Non–Marketable Assets and Capital Market Equilibrium Under Uncertainty. In: M. C. Jensen (Hrsg.), *Studies in the Theory of Capital Markets*, S. 223–248. Praeger, New York.

Rubinstein, M. E. (1976). The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options. *Bell journal of Economics* 7: S. 407–425.

Schwetzler, B. (2000). Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent– oder Risikozuschlagsmethode? *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 52: S. 469–486.

Stapleton, R. C. und Subrahmanyam, M. G. (1978). A Multiperiod Equilibrium Asset Pricing Model. *Econometrica* 46: S. 1077–1096.

Wilhelm, J. (1983a). *Finanztitelmärkte und Unternehmensfinanzierung*. Heidelberger betriebswirtschaftliche Schriften. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

Wilhelm, J. (1983b). Marktwertmaximierung — Ein didaktisch einfacher Zugang zu einem Grundlagenproblem der Investitions– und Finanzierungstheorie. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* 53: S. 516–534.