Lösungsskizzen zu Kapitel 3.2.4

Aufgabe 3.2-1

Lösung:

Berechnung der a posteriori Wahrscheinlichkeiten:

$$\rho_{11} = \rho(s_1|x_1) = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,7 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8} = \frac{0,14}{0,14 + 0,16} = \frac{0,14}{0,30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

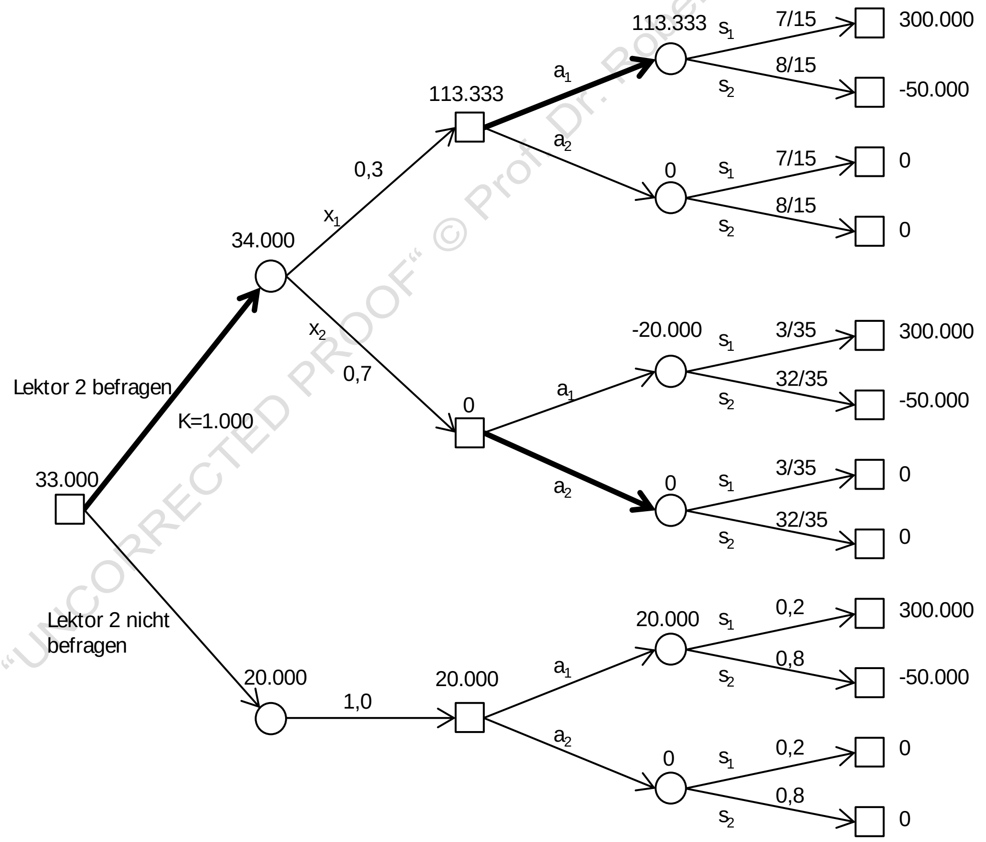
$$\rho_{21} = \rho(s_2|x_1) = \frac{0,2 \cdot 0,8}{0,7 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8} = \frac{0,16}{0,14 + 0,16} = \frac{0,16}{0,30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

$$\rho_{12} = \rho(s_1|x_2) = \frac{0,3 \cdot 0,2}{0,3 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8} = \frac{0,06}{0,06 + 0,64} = \frac{0,06}{0,70} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

$$\rho_{22} = \rho(s_2|x_2) = \frac{0,8 \cdot 0,8}{0,3 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8} = \frac{0,64}{0,06 + 0,64} = \frac{0,64}{0,70} = \frac{64}{70} = \frac{32}{35}$$

Berechnung der totalen Wahrscheinlichkeiten:

$\tau_1 = 0,30;\ \tau_2 = 0,70$



Isoliert betrachtet, ist Lektor 2 zu befragen. Urteilt er positiv, so soll der Verleger das Buch herausbringen, urteilt er negativ, soll der Verleger auf eine Herausgabe verzichten.

Es errechnet sich ein Gewinnerwartungswert für diese Strategie in Höhe von 33.000 EUR. Wie im Beispiel 3.2-1 errechnet wurde, ergibt sich bei optimaler Strategie bezüglich des Lektors 1 ein Gewinnerwartungswert in Höhe von 34.000 EUR. Daraus folgt, dass der Verleger den Lektor 2 nicht anstelle des Lektors 1 einsetzen soll.

Aufgabe 3.2-2

Lösung:

Der erwartete Wert der unvollkommenen Information des Lektors 2 errechnet sich für die Aufgabe 3.2-1 mit:

$$w^u = 34000 - 20000 = 14000$$

und übersteigt die Kosten in Höhe von 1000 EUR. Es verbleibt ein (Netto-) Informationswert in Höhe von 13000 EUR.

Im Beispiel 3.2-5 werden beide Lektoren betrachtet. Die Zurechnung des Informationswertes auf einen der beiden Lektoren ist grundsätzlich nicht möglich. Ermittelt werden kann allenfalls der zusätzliche Informationswert der Auskunft des Lektors 2 für den Fall, dass der Verleger ansonsten nur den Lektor 1 befragen würde. In diesem Fall beträgt der (zusätzliche) (Netto-) Informationswert des Lektors 2 200 EUR.

Der Unterschied erklärt sich aus der unterschiedlichen Bezugsbasis (Alternativen):

- Im Fall der Aufgabe 3.2-1 besteht die Alternative darin, keine Zusatzinformationen einzuholen und sich aufgrund seiner a priori Wahrscheinlichkeiten zu entscheiden.
- Im Fall des Beispiels 3.2-5 kann eine Alternative darin gesehen werden, (nur) den Lektor 1 zu befragen und sich entsprechend der optimalen Strategie zu entscheiden.

Aufgabe 3.2-3

Lösung:

Strukturierung des Problems:
Ziel: Maximierung der Einnahmen der Staatskasse

- Aktionen:
  a_1: Blutalkoholtest durchführen
  a_2: Blutalkoholtest nicht durchführen

- Umweltzustände
  s_1: Autofahrer ist betrunken (> 0,8‰)
  s_2: Autofahrer ist nicht betrunken (≤ 0,8‰)

	s_1	s_2
a_1	200	-50
a_2	0	0

Ergebnisse:

- A-priori Wahrscheinlichkeit über die Umweltzustände:
  $p = (p_1; p_2) = (0,6; 0,4)$

- Zusatzinformation
  x_1: Röhrchen verfärbt sich
  x_2: Röhrchen verfärbt sich nicht

$\Theta(x \mid s)$	x_1	x_2
s_1	0,90	0,10
s_2	0,05	0,95

Die Treffsicherheit des Röhrchens lässt sich durch die Likelihood-Wahrscheinlichkeiten $\Theta(x \mid s)$ beschreiben:

Das Einholen der Zusatzinformationen ist mit Kosten in Höhe von 5 EUR verbunden.

Berechnung der a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten:

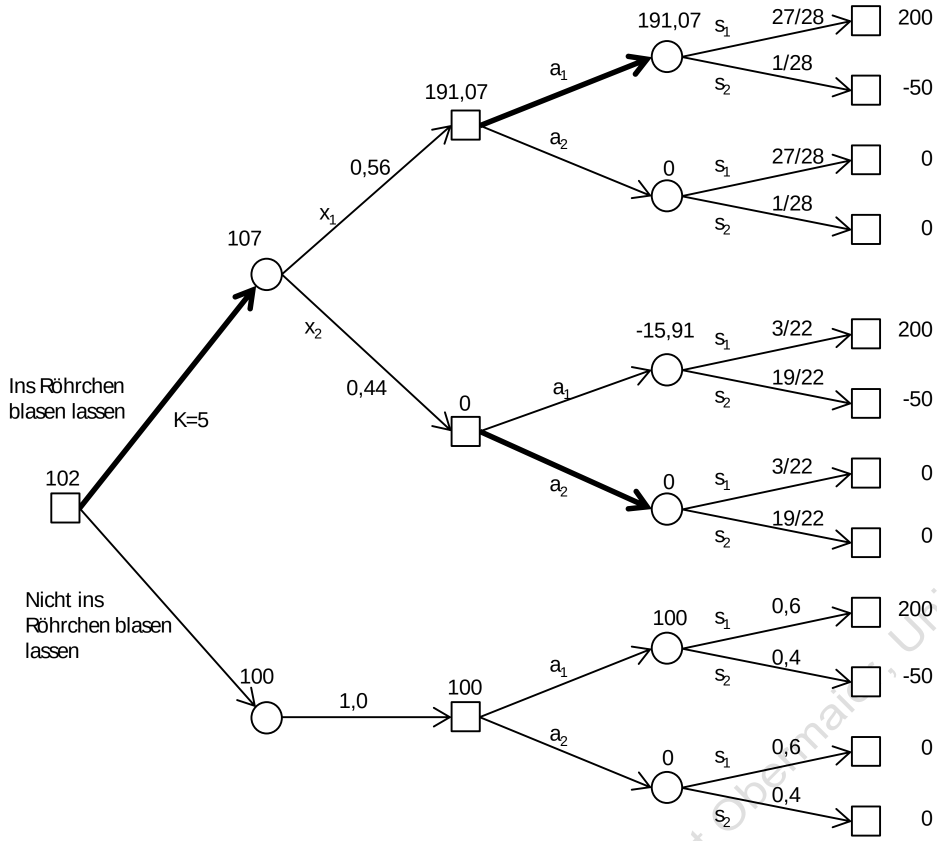
$$\rho_{11} = \rho(s_1 \mid x_1) = \frac{0,9 \cdot 0,6}{0,9 \cdot 0,6 + 0,05 \cdot 0,4} = \frac{0,54}{0,54 + 0,02} = \frac{0,54}{0,56} = \frac{54}{56} = \frac{27}{28}$$

$$\rho_{21} = \rho(s_2 \mid x_1) = \frac{0,05 \cdot 0,4}{0,9 \cdot 0,6 + 0,05 \cdot 0,4} = \frac{0,02}{0,54 + 0,02} = \frac{0,02}{0,56} = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$$

$$\rho_{12} = \rho(s_1 \mid x_2) = \frac{0,1 \cdot 0,6}{0,1 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,4} = \frac{0,06}{0,06 + 0,38} = \frac{0,06}{0,44} = \frac{6}{44} = \frac{3}{22}$$

$$\rho_{22} = \rho(s_2 \mid x_2) = \frac{0,95 \cdot 0,4}{0,1 \cdot 0,6 + 0,95 \cdot 0,4} = \frac{0,38}{0,06 + 0,38} = \frac{0,38}{0,44} = \frac{38}{44} = \frac{19}{22}$$

Berechnung der totalen Wahrscheinlichkeiten:
$\tau_1 = 0,56;\ \tau_2 = 0,44$ (Wahrscheinlichkeit, dass sich das Röhrchen verfärbt; bzw. nicht verfärbt)



Die Polizeistreife soll den Kraftfahrer ins Röhrchen blasen lassen und für den Fall, dass sich das Röhrchen verfärbt, einen Blutalkoholtest durchführen lassen, anderenfalls auf den Blutalkoholtest verzichten. (Der Gewinnerwartungswert bei dieser Strategie beträgt 102 EUR.)

Aufgabe 3.2-4

Lösung:

Der erwartete Wert der unvollkommenen Information des Röhrchens für die Polizisten errechnet sich mit:

$$w^u = 107 - 100 = 7$$

und übersteigt die Kosten von 5 DM; es verbleibt ein (Netto-) Informationswert in Höhe von 2 EUR.

Aufgabe 3.2-5

Lösung:

Die a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten nach zweimaligem Blasen errechnen sich mit

(a) für den Fall, dass sich beim ersten Blasen das Röhrchen verfärbte $\hat{p} = \left(\frac{27}{28}; \frac{1}{28}\right)$

$$\rho_{11} = \rho(s_1|x_1) = \frac{0{,}9 \cdot \frac{27}{28}}{0{,}9 \cdot \frac{27}{28} + 0{,}05 \cdot \frac{1}{28}} = \frac{\frac{24{,}3}{28}}{\frac{24{,}3 + 0{,}05}{28}} = \frac{24{,}3}{24{,}35} = 0{,}9979$$

$$\rho_{21} = \rho(s_2|x_1) = \frac{0{,}05 \cdot \frac{1}{28}}{0{,}9 \cdot \frac{27}{28} + 0{,}05 \cdot \frac{1}{28}} = \frac{\frac{0{,}05}{28}}{\frac{24{,}35}{28}} = \frac{0{,}05}{24{,}35} = 0{,}0021$$

$$\rho_{12} = \rho(s_1|x_2) = \frac{0{,}1 \cdot \frac{27}{28}}{0{,}1 \cdot \frac{27}{28} + 0{,}95 \cdot \frac{1}{28}} = \frac{\frac{2{,}7}{28}}{\frac{2{,}7 + 0{,}95}{28}} = \frac{2{,}7}{3{,}65} = 0{,}7397$$

$$\rho_{22} = \rho(s_2|x_2) = \frac{0{,}95 \cdot \frac{1}{28}}{0{,}1 \cdot \frac{27}{28} + 0{,}95 \cdot \frac{1}{28}} = \frac{\frac{0{,}95}{28}}{\frac{2{,}7 + 0{,}95}{28}} = \frac{0{,}95}{3{,}65} = 0{,}2603$$

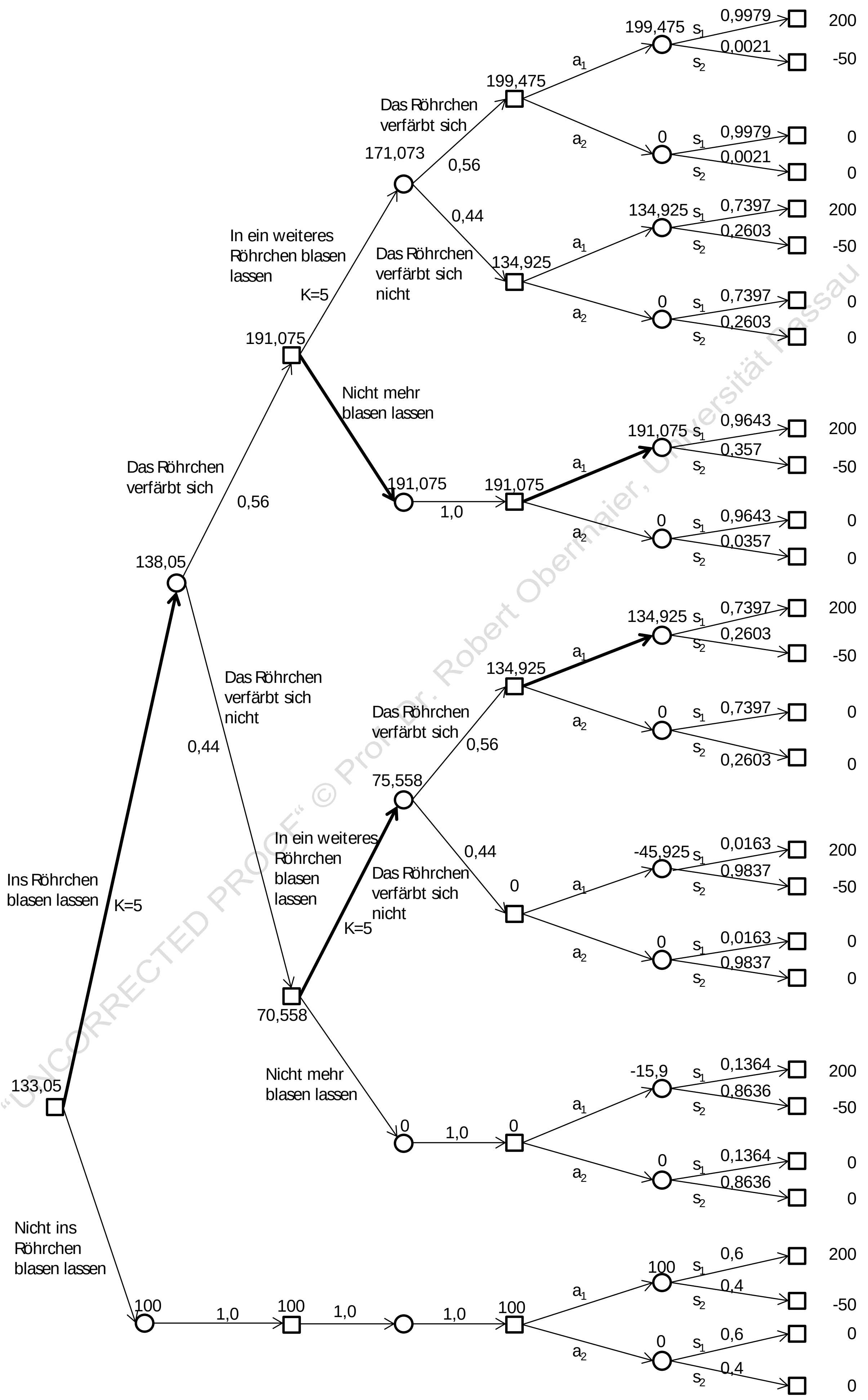
(b) für den Fall, dass sich beim ersten Blasen das Röhrchen nicht verfärbte $\hat{p} = \left(\frac{3}{22}; \frac{19}{22}\right)$

$$\rho_{11} = \rho(s_1|x_1) = \frac{0{,}9 \cdot \frac{3}{22}}{0{,}9 \cdot \frac{3}{22} + 0{,}05 \cdot \frac{19}{22}} = \frac{\frac{2{,}7}{22}}{\frac{2{,}7 + 0{,}95}{22}} = \frac{2{,}7}{3{,}65} = 0{,}7397$$

$$\rho_{21} = \rho(s_2|x_1) = \frac{0{,}05 \cdot \frac{19}{22}}{0{,}9 \cdot \frac{3}{22} + 0{,}05 \cdot \frac{19}{22}} = \frac{\frac{0{,}95}{22}}{\frac{2{,}7 + 0{,}95}{22}} = \frac{0{,}95}{3{,}65} = 0{,}2603$$

$$\rho_{12} = \rho(s_1|x_2) = \frac{0{,}1 \cdot \frac{3}{22}}{0{,}1 \cdot \frac{3}{22} + 0{,}95 \cdot \frac{19}{22}} = \frac{\frac{0{,}3}{22}}{\frac{0{,}3 + 18{,}05}{22}} = \frac{0{,}3}{18{,}35} = 0{,}0163$$

$$\rho_{22} = \rho(s_2|x_2) = \frac{0{,}95 \cdot \frac{19}{22}}{0{,}1 \cdot \frac{3}{22} + 0{,}95 \cdot \frac{19}{22}} = \frac{\frac{18{,}05}{22}}{\frac{0{,}3 + 18{,}05}{22}} = \frac{18{,}05}{18{,}35} = 0{,}9837$$



133,05
Ins Röhrchen blasen lassen
K=5
138,05
Das Röhrchen verfärbt sich
0,56
191,075
In ein weiteres Röhrchen blasen lassen
K=5
171,073
Das Röhrchen verfärbt sich
0,56
199,475
a1
199,475
s1
0,9979
200
s2
0,0021
-50
a2
0
s1
0,9979
0
s2
0,0021
0
0,44
Das Röhrchen verfärbt sich nicht
134,925
a1
134,925
s1
0,7397
200
s2
0,2603
-50
a2
0
s1
0,7397
0
s2
0,2603
0
Nicht mehr blasen lassen
191,075
1,0
191,075
a1
191,075
s1
0,9643
200
s2
0,357
-50
a2
0
s1
0,9643
0
s2
0,0357
0
Das Röhrchen verfärbt sich nicht
0,44
70,558
In ein weiteres Röhrchen blasen lassen
K=5
75,558
Das Röhrchen verfärbt sich
0,56
134,925
a1
134,925
s1
0,7397
200
s2
0,2603
-50
a2
0
s1
0,7397
0
s2
0,2603
0
0,44
Das Röhrchen verfärbt sich nicht
0
a1
-45,925
s1
0,0163
200
s2
0,9837
-50
a2
0
s1
0,0163
0
s2
0,9837
0
Nicht mehr blasen lassen
0
1,0
0
a1
-15,9
s1
0,1364
200
s2
0,8636
-50
a2
0
s1
0,1364
0
s2
0,8636
0
Nicht ins Röhrchen blasen lassen
100
1,0
100
1,0
1,0
100
a1
100
s1
0,6
200
s2
0,4
-50
a2
0
s1
0,6
0
s2
0,4
0

Demnach verhält sich die Polizeistreife dann optimal, wenn sie den Kraftfahrer in ein Röhrchen blasen lässt. Verfärbt sich das Röhrchen, so ist ein Blutalkoholtest durchzuführen. Verfärbt sich das Röhrchen nicht, so soll die Polizeistreife den Kraftfahrer in ein weiteres Röhrchen blasen lassen. Verfärbt sich das zweite Röhrchen, so ist ein Blutalkoholtest durchzuführen. Verfärbt sich auch das zweite Röhrchen nicht, so ist auf einen Alkoholtest zu verzichten.

Der erwartete (Netto-)Wert der unvollkommenen Information vom Blasen in bis zu zwei Röhrchen entsprechend der optimalen Strategie beträgt 33,05 EUR.

Der erwartete Wert der vollkommenen Information beträgt 120 EUR.